Таким образом, у первого игрока существуют стратегии, обеспечивающие ему получение выигрыша, не меньшего $\max(K_{13}, M_{13}, L_1)$. Легко показать, что больший выигрыш он гарантированно получить не может. Следовательно, верно равенство $\gamma(\overline{\Gamma}) = \max(K_{13}, M_{13}, L_1)$, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меньшиков И. С.* Игра трёх лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 5. С. 1148–1156.

2. *Кукушкин Н. С.* Бескоалиционные игры трёх лиц с фиксированной иерархической структурой // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 896–911.

3. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры трёх лиц с коалициями // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 41–43.

4. *Кузнецова И. А.* Об одном классе бескоалиционных иерархических игр трёх лиц // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 34–36.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

В настоящей статье рассматривается вопрос о базисах Рисса в $L_2[0,1]$ из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af = \alpha \int_0^x A_1(x,t) f(t)dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

где $\alpha^2 \neq 1$, $\frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_1(x,t) \left(\frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_2(x,t) \right)$ при $0 \le k+l \le 2$, причем, если $k+l=2$, то $k=l=1$, непрерывны при $t \le x \, (t \ge x)$, $A_1(x, x-0) = A_2(x, x+0) = 1$.

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы, допускающие разрывы самих ядер или их производных, впервые рассматривались одним из авторов в [1]. В дальнейшем исследованию таких операторов было посвящено много работ (например, [2 – 4]). В частности, в [4] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt. \tag{2}$$

В этой статье разработан метод, основанный на представлении резольвент сопутствующих интегродифференциальных операторов через специальные интегральные операторы простой структуры, называемые элементарными. Оператор (1) — существенно более сложный, чем (2), и базисность Рисса его с.п.ф. доказывается за счет дальнейшего развития метода из [4].

Сведем оператор (1) к оператору в пространстве вектор-функций размерности 2. Введем оператор

$$\tilde{A}\tilde{f} = \int_0^1 \tilde{A}(x,t)\tilde{f}(t)dt, \tag{3}$$

$\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T – знак транспорирования),

$$\tilde{A}(x_1 t) = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon(x,t)A_1(x,t) & \varepsilon(x,t)A_2(1-x,1-t) \\ \varepsilon(t,x)A_2(x,t) & \alpha\varepsilon(t,x)A_1(1-x,1-t) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$.

Теорема 1. *Если $y = Af$, то $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$, где $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$. Обратно, если $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$ и $f_1(x) = f_2(1-x)$, то $y_1(x) = y_2(1-x)$ и $y_1 = Af_1$.*

Представление (3) важно тем, что $\tilde{A}(x,t)$ терпит разрыв лишь на линии $t = x$.

Теорема 2. *Имеет место представление*

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{y}(x) = B^{-1}\tilde{y}'(x) + a_1(x)\tilde{y}(0) + a_2(x)\tilde{y}(1) + a_3(x)\tilde{y}(x) + \int_0^1 a(x,t)\tilde{y}(t)dt,$$

где $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0) + \tilde{M}_1\tilde{y}(1) = 0; \tag{4}$$

$B = \tilde{A}(x,x-0) - \tilde{A}(x,x+0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$; *$a_i(x)$ $(i = 1,2,3)$, $a_3'(x)$ – непрерывные матрицы-функции; матрица $a(x,t)$ непрерывна по x и t, где могут быть разрывы первого рода, $a(x,x+0)$, $a(x,x-0)$ непрерывны;*

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Если λ таково, что при $\tilde{f}(x) \equiv 0$ интегро-дифференциальная система*

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{y}(x) - \lambda\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x)$$

с условием (4) имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$ (E – единичный оператор) существует и $R_\lambda(A)f = y_1(x)$, где $y_1(x)$ – первая компонента $\tilde{y}(x)$.

Введем обозначения: $P_i(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma(i = 1, 2, 3)$, где $\mathcal{D} = diag(\omega, -\omega)$, $\omega = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\alpha^2-1} - \alpha & \sqrt{\alpha^2-1} + \alpha \end{pmatrix}$; $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, где $H_0(x) = diag(h_1(x), h_2(x))$, $h_i(x) = exp\left(-\int_0^x p_{ii}(t)dt\right)$, $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P_3(x)$, $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_2(x) \\ r_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ – кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$H_0^{'}(x) + P_3(x)H_0(x) + (H_1(x)\mathcal{D} - \mathcal{D}H_1(x)) = 0;$$

$$P_i(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_i(x)H(i - 1, \lambda)(i = 1, 2);$$

$$P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)\left[H_1^{'}(x) + P_3(x)H_1(x)\right];$$

$$N_\lambda(x, t) = H^{-1}(x, \lambda)N(x, t)H(t, \lambda),$$

где $N(x, t) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}a(x, t)\Gamma$;

$$m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x),$$

где $m(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}\tilde{f}(x)$;

$$M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda),\ M_{1,\lambda} = M_1H(1, \lambda),$$

где $M_0 = \tilde{M}_0\Gamma$, $M_1 = \tilde{M}_1\Gamma$.

Теорема 4. *Если $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda))^T$ – решение системы*

$$v^{'}(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v(1) + P_3(x, \lambda)v(x) +$$

$$+ \int_0^1 N_\lambda(x, t)v(t)dt) - \lambda\mathcal{D}v(x) = m(x, \lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0,$$

то

$$R_\lambda(A)f = \sum_{j=1}^{2} h_j(x)v_j(x, \lambda) + \lambda^{-1}\sum_{j=1}^{2} r_j(x)v_j(x, \lambda).$$

Обозначим $\Theta_0 = (\omega+\alpha)h_2(1)$, $\Theta_1 = (\omega-\alpha)h_1(1)$. Тогда $\Theta_0\Theta_1 \neq 0$. Обозначим через S_δ область, получающуюся из комплексной λ-плоскости удалением всех нулей функции $\Theta_0 + \Theta_1 e^{2\lambda\omega}$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Представим $R_\lambda(A)f$ при λ, принадлежащих границам кружков Γ_k из определения S_δ, в виде конечной линейной комбинации с ограниченными по λ коэффициентами простейших интегральных так называемых элементарных операторов.

Лемма 1. *Пусть J – любой конечный набор достаточно больших, по модулью целых чисел. Тогда*

$$\left\|\sum_{k\in J}\int_{\Gamma_k} R_\lambda d_\lambda\right\| \leq C,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2[0,1]$, постоянная C не зависит от набора J.

Лемма 2. *Все характеристические числа оператора A, достаточно большие по модулю, простые.*

Лемма 3. *Система с.п.ф. оператора A^* полна в $L_2[0,1]$.*

Стандартными рассуждениями с помощью лемм 1 – 3 получается следующий основной результат.

Теорема 5. *Система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1988. Т. 64, № 6. С. 932–942.

2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

3. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

4. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.