3. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

4. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : http://arxiv.org/abs/1103.4337.

УДК 517.984

Р. А. Иванов, В. Е. Фирстов

ПРИНЦИП МИНИМУМА ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРУППОВОГО СОТРУДНИЧЕСТВА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

При организации группового сотрудничества в учебном процессе наиболее важным моментом является формирование разбиения обучаемого контингента на коалиции, при котором обеспечивается оптимальный учебный эффект. Процедура оптимизации в данном случае исходит из следующей информационной модели [1 – 3].

1. Модель. Пусть $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\}$ – конечное множество, представляющее обучаемый контингент, которому предлагается выполнить некоторое задание (тест), и контролируется время его выполнения отдельными учащимися. В результате такого измерения устанавливается цепочка неравенств $0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m < T$, где t_i – общее время выполнения задания i-м учащимся, в котором определенным образом учтено качество проделанной работы; $i = \overline{1; m}; T$ – временной регламент, определяемый параметрами теста. Пусть данная цепочка неравенств есть некоторое устойчивое статистическое среднее, на основе которого определяются вероятности $\alpha_i = 1 - t_i/T$, характеризующие уровень обученности i-го учащегося, и задающие распределение нормированных вероятностей

$$p(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}, i = \overline{1; m}. \qquad (1)$$

Пусть для улучшения показателей обучения контингента A задействована технология группового сотрудничества, что формально выражается в виде разбиения множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,\ A_j \cap Ak = \oslash,\ j \neq k,\ j; k = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

где

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = |A| = m. \qquad (3)$$

Для проведения процедуры оптимизации в рамках излагаемой модели определяются групповые вероятности

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} p(a_i),\ \forall a_i \in A_j, \tag{4}$$

где p_j – вероятность того, что некоторый элемент из A входит в класс A_j. С вероятностями p_j связывается групповая информационная энтропия

$$H(p) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 p_j. \tag{5}$$

Оптимум в рассматриваемой информационной модели достигается, если минимальна энтропия $H(p)$. Поэтому при оптимизации группового сотрудничества в учебном процессе разбиение (2) должно формироваться с учетом распределения (1) так, чтобы при определении групповых вероятностей (4) обеспечивался минимум энтропии $H(p)$ в (5), т.е. критерий оптимизации имеет вид

$$H(p) \to \min. \tag{6}$$

2. Анализ модели. Из формул (1) – (5) видно, что разность между энтропией $H(A)$ при обучении контингента A и энтропией $H(p)$ при обучении того же контингента, разбитого на группы, положительна:

$$\Delta H = H(A) - H(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 p_j - \sum_{i=1}^{m} p(a_i) \log_2 p(a_i) \geq 0. \tag{7}$$

Действительно, разворачивая вероятности p_j по компонентам разбиения

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1j_1};\ p_2 = p_{21} + p_{22} + \ldots +$$

$$+p_{2j_2}; \ldots; p_n = p_{n1} + p_{n2} + \ldots + p_{nj_n}, \tag{8}$$

где $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = m$; $1 \leq j_1; \ldots; j_n \leq m$, после подстановки (8) в (7) получаем

$$(p_{11}+\ldots+p_{1j_1}) \log_2(p_{11}+\ldots+p_{1j_1})+\ldots+(p_{n1}+p_{nj_n})-(p(a_1) \log_2 p(a_1)+\ldots+$$

$$+p(a_m) \log_2 p(a_m)) =$$

$$= p(a_1) \log_2(1 + \frac{p(a_2) + \ldots + p(a_{j1})}{p(a_1)}) + \ldots +$$

$$+p(a_m)\log_2(1+\frac{p(a_{m-j_n})+\ldots+p(a_{m-1})}{p(a_m)})\geq 0. \qquad (9)$$

Поскольку в связи с (8) $p_{11};\ldots;p_{nj_n}$ – это перестановки $p(a_1);\ldots;p(a_m)$, то, здесь мы положим для определенности, $p_{11}=p(a_1);\ldots;p_{nj_n}=p(a_m)$, Таким образом, установлено, что $H(A)\geq H(p)$, т.е. реализация технологии сотрудничества в учебном процессе приводит к снижению информационной энтропии в процессе обучения. Это обусловлено тем, что при разбиении на группы учебная информация прорабатывается не отдельным учащимся, а посредством ее обсуждения в группе, что равносильно появлению дополнительных каналов целевого общения, реализующих режим усиления при восприятии целевой информации, т.е. ее лучшее понимание и усвоение.

3. Эксперименты на школьном уровне проводились на базе МОУ «Гимназия № 5» Заводского района Саратова на уроках математики в 4 «А» классе и 10–11-х классах. На первой диаграмме (рис. 1) по оси абсцисс занумерованы фамилии учащихся; по оси ординат — количество правильных ответов на тестовое задание. Тест содержал 20 вопросов. Как видно из диаграммы рис. 1, после проведения ИКТ показатели академической успешности школьников улучшились в среднем на 27,5%. На второй диаграмме (рис. 2) условия те же, только по оси ординат отложено время выполнения тестовых заданий (в мин.).

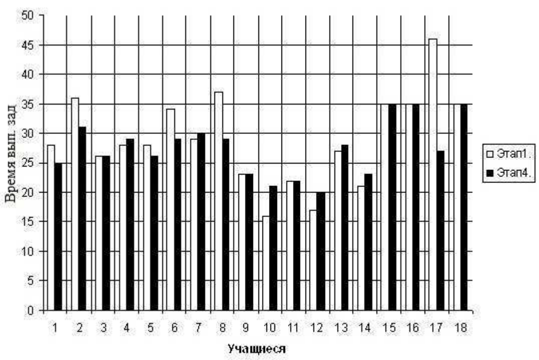

Рис. 1

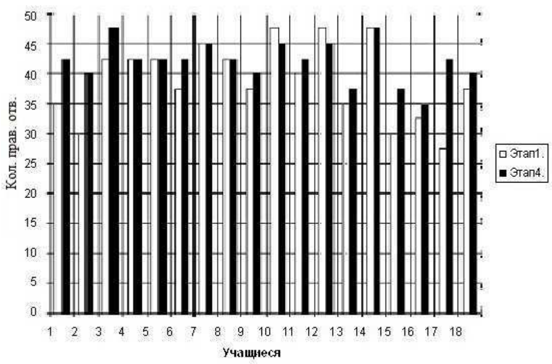

Рис. 2

Здесь ситуация неоднозначная, особенно в группе учащихся с быстрым мышлением, хотя в среднем все-таки прослеживается тенденция к уменьшению затрат времени после проведения ИКТ. Аналогичные измерения, проведенные в 10–11-х классах, дали увеличение показателей успеваемости на 20–25%.

4. Программное обеспечение измерений. Для определения минимума энтропии (6) разработана специальная программа перечисления всевозможных конфигураций разбиения m - элементного множества, количество которых определяется с помощью полиномов Белла [4]:

$$B(m+1)=\sum_{i=0}^{m} c_m^i B(i), \qquad (10)$$

где $B(0) = 1$. Числа Белла с увеличением мощности m множества A растут довольно быстро, что иллюстрируется данными следующей таблицы.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B(m)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570

m	12	13	14	15	16
$B(m)$	4213597	27644437	190899322	1382958545	10480142147

m	17	18	19	20
$B(m)$	82864869804	682076806159	5832742205057	51724158235372

В связи с этим, как показывает опыт отладки программы перечисления конфигураций разбиения, при $m>30$ появляются проблемы с ресурсом компьютерной памяти и в этом случае возникает задача оптимизации сложности алгоритма перечисления конфигураций разбиения, хотя для современной школы или вуза такие значения контингентов встречаются редко.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фирстов В. Е.* Количественные меры информации и оптимизация группового сотрудничества при обучении // Вестник Саратовского технического университета. 2008. № 3 (34), вып. 1. С. 105–109.
2. *Фирстов В. Е.* Информационная технология организации группового сотрудничества при обучении // Вестник Саратовского технического университета. 2009. № 2 (39), вып. 2. С. 101–103
3. *Firstov V. E.* Semantic Model and Optimization of Creative Processes at Mathematical Knowledge Formation // Natural Science. 2010. Vol. 2, №. 8. P. 915–922.
4. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб. : Питер, 2002. 304 с.