УДК 517.51:518

Е. В. Шишкова

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССАХ ЛИПШИЦА

Модифицируя операторы из [1], в [2] автором было получено семейство интегральных операторов, позволяющее восстанавливать функцию вместе с производными до l-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим эти операторы при $l = 0$, $a = 0$, $b = 1$:

$$\hat{T}^0_{\alpha k} f = a_k \int\limits_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} \left((t - x(1-2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt,$$

где $\alpha > 0$ – параметр, $a_k = (-1)^k \dfrac{(2k+1)!}{(k!)^2 2^{2k+1}} \alpha^{-(2k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

В данной статье находится точная по порядку оценка для величины

$$\Delta_1(\hat{T}^0_{\alpha k}, Lip_M\beta[0,1]) = sup\left\{ \left\| \hat{T}^0_{\alpha k} f - f \right\|_{C[0,1]} : f \in Lip_M\beta[0,1] \right\},$$

характеризующей скорость сходимости функции $f(x)$ функциями $\hat{T}^0_{\alpha k} f$ на классе $Lip_M\beta[0,1]$.

Теорема 1. *Справедлива двусторонняя оценка:*

$$M\frac{(2k+1)!\Gamma(k+\beta+1)}{k!\Gamma(2k+\beta+2)} 2^\beta \alpha^\beta \leqslant \Delta_1(\hat{T}^0_{\alpha k}, Lip_M\beta[0,1]) \leqslant M 2^\beta \alpha^\beta,$$

где $\Gamma(x)$ *– гамма-функция Эйлера,* $0 < \beta \leqslant 1$.

Доказательство. Учитывая, что $\hat{T}^0_{\alpha k} 1 \equiv 1$, имеем

$$\left\| \hat{T}^0_{\alpha k} f - f \right\|_{C[0,1]} =$$

$$= \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| a_k \int\limits_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} \left((t - x(1-2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2\right)^k (f(t) - f(x))dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1, |x-t| \leqslant 2\alpha} |f(t) - f(x)| \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| a_k \int\limits_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} \left((t - x(1-2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2\right)^k dt \right| =$$

$$= \omega(2\alpha) \leqslant M(2\alpha)^\beta,$$

где $\omega(2\alpha)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$. Заметим, что оценка сверху для величины $\left\|\hat{T}^0_{\alpha k} f - f\right\|_{C[0,1]}$ не зависит от выбора функции $f(x)$, поэтому $\Delta_1(\hat{T}^0_{\alpha k}, Lip_M \beta[0,1]) \leqslant M(2\alpha)^\beta$.

С другой стороны,

$$\Delta_1(\hat{T}^0_{\alpha k}, Lip_M \beta[0,1]) \geqslant \left\|\hat{T}^0_{\alpha k} f - f\right\|_{C[0,1]} \geqslant \left|\hat{T}^0_{\alpha k} f_0 - f_0\right|_{x=0},$$

где в качестве функции $f_0(x)$ возьмем $f_0(x) = Mx^\beta \in Lip_M \beta[0,1]$. Таким образом

$$\left|\hat{T}^0_{\alpha k} f_0 - f_0\right|_{x=0} = \left| M a_k \int\limits_0^{2\alpha} \left((t-\alpha)^2 - \alpha^2\right)^k t^\beta dt \right| =$$

$$= \left| M a_k (-1)^k (2\alpha)^{2k+1} \int\limits_0^1 \xi^{k+\beta} (1-\xi)^k d\xi \right| =$$

$$= \left| M a_k (-1)^k (2\alpha)^{2k+1+\beta} \frac{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+\beta+2)} \right|,$$

где $\xi = t/2\alpha$.

Учитывая выражение для a_k, получаем оценку снизу в условии теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шишкова Е. В.* Регуляризация задачи численного дифференцирования // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 99–101.

2. *Хромова Г. В.* О дифференцировании функций, заданных с погрешностью //Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. 1984. Вып. 6. С. 53–58.