

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Для различных режимов нелинейной рефракции ударных волн на поверхности океана методами асимптотической теории коротких волн [1] проведем анализ основных параметров, характеризующих картину течения; с помощью численного метода последовательных приближений [2] построены поля давлений для случаев нерегулярной рефракции и регулярной рефракции с ударной волной, замыкающей область разрежения.

1. При падении ударной волны (УВ)  $AR$ ,  $BR$  (рис. 1, *a*, *б*) относительной интенсивности  $\Delta p/(\rho_0 c_0^2)$  под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность  $AF$  океана, разделяющую воздух и воду с газосодержащими  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ , возникают различные режимы рефракции:  $NR$  – нерегулярный (см. рис. 1, *a*),  $RR$  – регулярный (отсутствует фронт  $AB$ ),  $RRV$  – регулярный с ударной волной  $EB_1$ , замыкающей зону разрежения  $EAB_1$  (см. рис. 1, *б*).

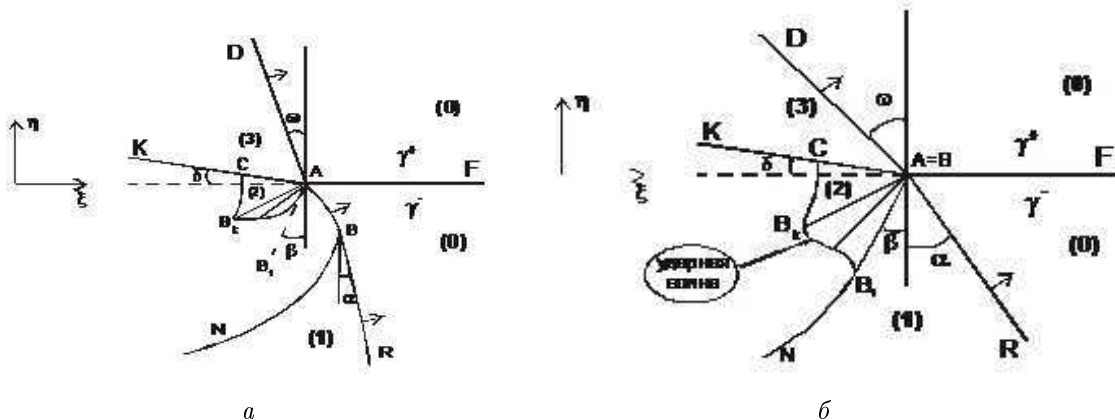


Рис. 1 Рефракция: *a* – нерегулярная рефракция ( $NR$ );  
*б* – регулярная рефракция с ударной волной,  
замыкающей волну разрежения ( $RRV$ )

Установлены основные параметры (параметры подобия) [3] для относительно слабых УВ ( $AR$ ,  $BR$ )

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma^-)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma^-)P_{10}, P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0(\gamma^-),$$

$$B_0 = p_0(\gamma^-)c_0^2(\gamma^-), L_0 = p_0R_0(\gamma^-)/B_0(\gamma^-), \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0.$$

При использовании модели гомогенной локально-равновесной пузырьковой среды с газосодержанием  $\gamma^- = m_{\text{II}}/m_{\text{I}}$  для жидкости и  $\gamma^+ = \infty$  для газа были установлены [4], в точке А два инварианта рефракции

$$\text{I: } c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad \text{II: } v^+ = v^-. \quad (1)$$

В переменных теории коротких волн (см. [1])

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \bar{\varepsilon}X, \eta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; R/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \Theta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; \\ \delta &= X + \frac{1}{2}Y^2, \quad \frac{u}{c_0} = P_{10}\frac{u^{(1)}}{c_0}, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{\frac{3}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}\frac{v^{(1)}}{c_0}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{p - p_0}{B_0} = P_{10}P^{(1)}, \quad \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon}\frac{\mu}{R_0}, \quad \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{\nu}{R_0}\frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}$$

течения в области возмущения АВНРК описываются системой уравнений

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_{\delta} + \nu_y + 3\mu = 0, \quad \mu_y = \nu_{\delta}, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}. \quad (3)$$

Решение (3) для волны разрежения  $AB_1E$  имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

На фронтах УВ, ограничивающих область возмущения  $(AB, EB_1)X = X^*(Y)$ , имеем условия  $(\mu', \nu' - \text{значения перед фронтом})$

$$X - \psi^{\nu}Y = \frac{1}{2}(\psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \quad \psi^{\nu} = \frac{dX^*}{dY}, \quad (\psi^{\nu} = \frac{d\xi^*}{d\eta}/\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

$$(\mu - \mu') \cdot (\psi^{\nu} + Y) = \nu' - \nu, \quad P^{(1)} = \mu.$$

В точке  $A$  имеем  $\mu_A = q^-$  – перед передним фронтом волны разрежения ( $AB_1$ ),  $\mu_A = q^+$  – за задним фронтом волны разрежения ( $AE$ ), т. е.

$$q^- = (p_A^- - p_0)/(p_1 - p_0), q^+ = (p_A^+ - p_0)/(p_1 - p_0).$$

Инварианты I, II (1) в переменных (2) для верхней и нижней сред приводятся к виду (см. [3])

$$(I) : \quad \omega^\nu = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^2}{\bar{L}} + q^-, \quad \omega^\nu = \frac{tg\omega}{\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}, \alpha^\nu = \frac{tg\alpha}{\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}, \quad (6)$$

$$(II) : \quad \frac{q^+ \bar{B}}{\bar{c}} \omega^\nu = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d, \quad \frac{\bar{B}}{\bar{c}} = \bar{\rho} \bar{c}, \quad c_\gamma = (c_0^- - c_0^+)/ (c_0^- \bar{\varepsilon}), \quad \bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}.$$

Исключая  $\omega^\nu$  в (6), получим выражение для определения  $q^+$

$$q^{+2} \bar{\rho} \bar{c} (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + q^-) = \left[ \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d \right]^2. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha^\nu, c_\gamma, \bar{L}, \bar{\rho}, \bar{c}$  – параметры подобия;  $X_A, d$  – постоянные, которые определяются из условий на переднем фронте волны разрежения  $AB_1$ .

При режимах рефракции  $RR$  и  $RRV$  значение  $q^- = 1$ . При режиме  $NR$  для определения  $q^-$  в [5] использовалось точное решение (3), удовлетворяющее условиям течения в области  $EB_K ABN$  и позволяющее проинтегрировать уравнение фронта (5). Получена зависимость  $q^- = 1 - m^2$  от  $\alpha^\nu$ , при  $0 \leq \alpha^\nu \leq 1$ ,  $0.2 \leq q^- \leq 1$ . Переход от режима  $NR$  к  $RR$  происходит при  $\alpha^\nu = 1$ ; от  $RR$  к  $RRV$  при  $\alpha^\nu = 2.098$ .

При рефракции на поверхности океана ( $\gamma^+ = \infty, 0 \leq \gamma^- \leq 10^{-6}$ ) согласно (6) имеем для параметров подобия  $\bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+} \ll 1, c_\gamma \gg 1, \bar{\rho} \bar{c} \gg 1$ , т. е. при режимах  $NR, RR, RRV$  имеем

$$q^+ = 0. \quad (8)$$

Поверхность океана гасит ударные волны. Вывод (8) согласуется с более общими расчетами с помощью модели потенциальных адиабатических течений для ГЖС (см. [1]), когда  $0 \leq q^+ \leq 10^{-2}$  при  $0 \leq \gamma \leq 10^{-6}$ .

**2.** Численный метод решения краевых задач рефракции для областей возмущения  $ABNPK$  для системы уравнений (3) коротких волн основан (см. [1]) на использовании метода последовательных приближений (см. [2]). Краевые задачи для различных режимов рефракции представляют задачи эллиптического типа для системы (3) с заранее неиз-

вестными положениями УВ ( $AB, EB_1$ ), представляющими границы областей возмущений, и известными условиями на свободной поверхности  $AK$ , границах  $BN, BN_1, CE$ , представляющих линии слабого разрыва, а также условиями срачивания с областями линейного решения на  $DM$  и областью квазиодномерного решения на  $PN$ .

Задаются приближенные положения фронтов УВ, строится начальное поле давлений (методом прямых). Полученная краевая задача (I) для системы (3) решается численно методом конечных разностей 2-го порядка точности. Решение краевой задачи (I) используется для уточнения положений фронтов УВ путем численного интегрирования (5). Ставится краевая задача (II), решение которой также ищется методом конечных разностей. Начальным приближением берется решение задачи (I). Снова уточняется фронт. Решение считается найденным, если во всех расчетных точках области погрешность не превышает установленных значений.

На рис. 2 приведены результаты расчета поля давлений  $P^{(1)} = P^{(1)}(X, Y)$  для случая  $NR$  при  $\alpha^\nu = 0.5$ . Для получения точности  $\varepsilon_\Pi = 0.003$  потребовалось 12 итераций; для определения положения фронта УВ  $AB$  с точностью  $\varepsilon_\Phi = 0.005$  потребовалось 18 итераций.

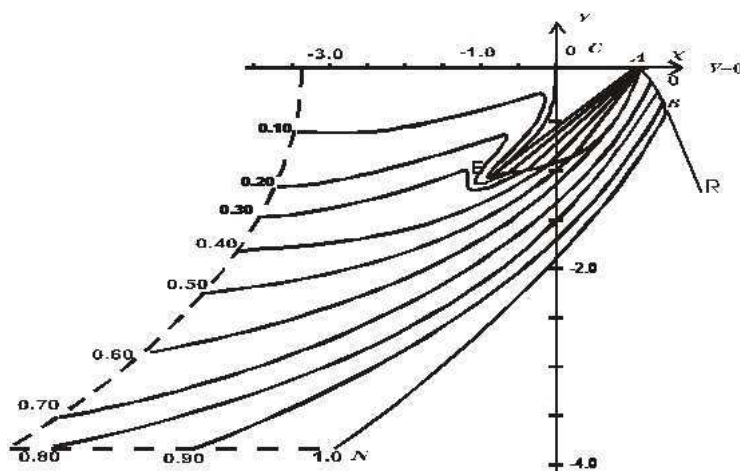


Рис. 2. Поле давлений, рассчитанное численным методом решения краевых задач нелинейной рефракции УВ

На рис. 3 представлены результаты расчета поля давлений для случая  $RRV$  при  $\alpha^\nu = 3.162$ . Для получения точности  $\varepsilon_\Pi = 0.003$  решения краевой задачи потребовалось 12 итераций; для определения положения фронта УВ  $EB_1$  с точностью  $\varepsilon_\Phi = 0.005$  потребовалось 16 итераций.

Следует отметить специфику поведения линий равных давлений: их сгущение вблизи фронтов слабых возмущений  $CE$ ,  $BN$  ( $B_1N$ ), а также за фронтом УВ  $EB_1$ , замыкающим область разрежения. Результаты расчетов согласуются с результатами, полученными при использовании класса точных решений в соответствующих случаях [5], а также экспериментальными интерферограммами.

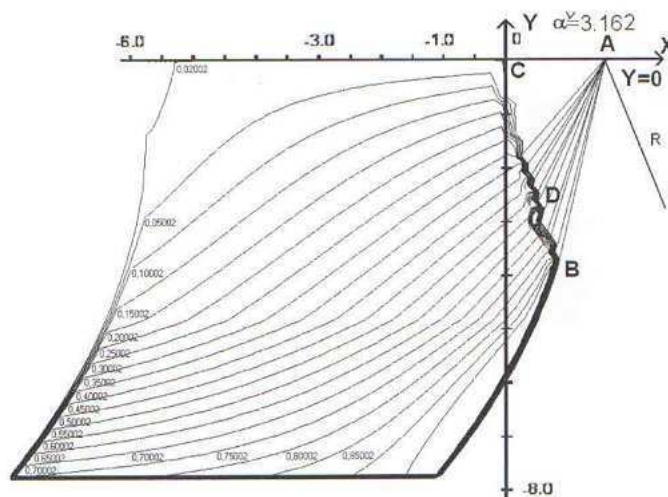


Рис. 3. Поле давлений, рассчитанное численным методом решения краевых задач нелинейной рефракции УВ

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. № 1. С. 249–254.
3. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 150–154.
4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
5. Шиндяпин Г. П. Об особенностях «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 3(6). С. 92–104.