3. *Чернов И. А.* Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 33–43.

УДК 629

А. К. Китарова, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты космического аппарата. Под действием такого управления орбита КА поворачивается в пространстве как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Для решения задачи использованы кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА в отклонениях и дифференциальное уравнение в отклонениях для эйлерова угла поворота орбиты.

Задача переориентации формулируется следующим образом: требуется построить управление u, переводящее орбиту КА за фиксированное время t_1, изменение ориентации которой в отклонениях описывается уравнениями [1]

$$2\frac{d\Delta\bar{\lambda}}{dt} = \Delta\bar{\lambda}\circ\bar{\Omega} = \frac{r\left(\varphi_{tr}(t)\right)}{c}u\Delta\bar{\lambda}\circ(\cos\varphi_{tr}(t)\bar{i_1} + \sin\varphi_{tr}(t)\bar{i_2}), \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi_{tr}}{dt} = \frac{c}{r^2}, r = \frac{p_{or}}{1+e_{or}\cos\varphi_{tr}}, c = \mathrm{const}, \Omega_1 = \frac{r}{c}u\cos\varphi_{tr}, \Omega_2 = \frac{r}{c}u\sin\varphi_{tr},$$

из любого заданного начального положения, характеризуемого кватернионом начального отклонения $\Delta\bar{\lambda}(t_0) = \tilde{\bar{\lambda}}^{*}\circ\bar{\lambda}^0$, в требуемое конечное положение, характеризуемое кватернионом конечного отклонения $\Delta\bar{\lambda}(t_1)$. Здесь $\bar{\lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА; φ_{tr} – истинная аномалия (угловая переменная, характеризующая положение КА на орбите); $r = |\bar{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; p_{or}, e_{or} – параметр и эксцентриситет орбиты, $c = |\bar{r}\times\bar{V}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА); $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$ – проекции вектора $\bar{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси; u – проекция вектора ускорения $\bar{u}$ от тяги реактивного двигателя на направление вектора момента скорости центра масс КА.

Кватернионная переменная $\Delta\bar{\lambda}$ характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\bar{\lambda}^*$, в соответствии с кватернионной формулой сложения конечных поворотов $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^* \circ \Delta\bar{\lambda}$, $\Delta\bar{\lambda} = \cos\dfrac{\Delta\varphi}{2} + \sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}\bar{e}_\Delta$, где $\Delta\varphi$, $\bar{e}_\Delta = e_{\Delta_1}\bar{i_1} + e_{\Delta_2}\bar{i_2} + e_{\Delta_3}\bar{i_3}$ являются для текущего момента времени t соответственно эйлеровым углом и единичным вектором эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота $\bar{\lambda}^*$.

При непосредственном использовании переменных $\Delta\varphi$, e_{Δ_i} для решения задачи переориентации орбиты КА необходимо рассматривать дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в этих переменных. Эти уравнения получаются из кватернионного уравнения в (1) при выделении в нем скалярной и векторной частей. В таком случае задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата формулируется следующим образом:

требуется построить управление

$$U = \bar{\Omega} \cdot \bar{e}_\Delta = \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} u(\cos\varphi_{tr}(t)e_{\Delta_1} + \sin\varphi_{tr}(t)e_{\Delta_2}), \tag{2}$$

переводящее орбиту космического аппарата, изменение ориентации которой описывается уравнением

$$\dot{\Delta\varphi} = U = \bar{\Omega} \cdot \bar{e_\Delta} = \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} u(\cos\varphi_{tr}(t)e_{\Delta_1} + \sin\varphi_{tr}(t)e_{\Delta_2}), \tag{3}$$

из начального положения, описываемого кватернионом ориентации $\bar{\lambda}_0$, в конечное положение, описываемое кватернионом ориентации $\bar{\lambda}^*$, за фиксированное время t_1. При этом должен минимизироваться функционал качества

$$I = \int\limits_0^{t_1} \left(\pm\frac{\alpha_1}{2}(\Delta\varphi)^2 + \frac{\alpha_2}{2}U^2\right) dt = \int\limits_0^{t_1} \left(\pm\frac{\alpha_1}{2}(\Delta\varphi)^2 + \frac{\alpha_2}{2}(\dot{\Delta\varphi})^2\right) dt, \tag{4}$$

где α_1, α_2 – положительные весовые коэффициенты.

Управление U здесь имеет смысл проекции вектора $\bar{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты на направление $\bar{e}_\Delta$ эйлеровой оси конечного поворота орбиты. Как видно из (2), управление U содержит искомое управление u.

Краевые условия по переменной $\Delta\varphi$ (эйлерову углу поворота орбиты) определяются соотношениями

$$\Delta\varphi(t_0) = \Delta\varphi(0) = 2\arccos scal(\tilde{\bar{\lambda}}^* \circ \bar{\lambda}^0), \Delta\varphi(t_1) = \Delta\varphi_1 \neq 0. \qquad (5)$$

Решение строится с использованием принципа максимума. Введем переменные ψ_0, ψ_1, сопряженные к фазовым переменным $x_1 = \Delta\varphi$ и $\dot{x_0} = \pm\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}U^2$. Функция Гамильтона — Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_0, \psi_1, x_0, x_1, U) = \psi_0\Big(\pm\frac{\alpha_1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha_2}{2}U^2\Big) + \psi_1 U. \qquad (6)$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции H по переменной U.

При переходе к физическому управлению u для знака «–» в подынтегральном выражении в (4) оптимальное управление имеет вид

$$\begin{gathered}u = \frac{c}{p_{or}}\frac{1 + e_{or}\cos\varphi_{tr}}{\cos\varphi_{tr}e_{\Delta_1} + \sin\varphi_{tr}e_{\Delta_2}}\Big[-k\Delta\varphi(0)\sin(kt)+ \\ +k\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi(0)\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)}\cos(kt)\Big], k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}},\end{gathered} \qquad (7)$$

и вид

$$\begin{gathered}u = \frac{c}{p_{or}}\frac{1 + e_{or}\cos\varphi_{tr}}{\cos\varphi_{tr}e_{\Delta_1} + \sin\varphi_{tr}e_{\Delta_2}}\Big[k\Delta\varphi(0)\,\mathrm{sh}(kt)+ \\ +k\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi(0)\,\mathrm{ch}(kt_1)}{\mathrm{sh}(kt_1)}\mathrm{ch}(kt)\Big], k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}},\end{gathered} \qquad (8)$$

для знака «+» в подынтегральном выражении в (4).

В случае $\Delta\varphi_1 = 0$ имеем решение, совпадающее с решением, приведенным в [1].

В случае, когда минимизируется интегральный квадратичный функционал в отношении только управления U и когда эйлеров угол поворота в конечный момент переориентации орбиты принимает нулевое значение, физическое управление u, имеющее смысл проекции вектора ускорения от тяги реактивного двигателя на направление, ортогональное плоскости орбиты космического аппарата, имеет вид

$$u = -\frac{c}{p_{or}}\frac{1 + e_{or}\cos\varphi_{tr}}{\cos\varphi_{tr}e_{\Delta_1} + \sin\varphi_{tr}e_{\Delta_2}}\frac{\Delta\varphi(0)}{t_1}. \qquad (9)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

В. С. Кожанов, И. А. Чернов

РОЛЬ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В НАХОЖДЕНИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Важное место при исследовании сложных математических моделей занимают точные частные аналитические решения. Они помогают выделить закономерности, свойства и структуру общего решения системы уравнений, описывающей модель. В статье предложен новый метод построения точных решений в гомэнтропической модели одномерной нестационарной газовой динамики, основанный на решении гипергеометрического уравнения. Приведены примеры новых решений.

Основные уравнения в гомэнтропической модели таковы [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial r}=0,\\ \frac{\partial c^2}{\partial t}+u\frac{\partial c^2}{\partial r}+(\gamma-1)c^2\left[\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right]=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где t – время, r – координата, $u=u(r,t)$ – скорость частицы жидкости, $c^2=c^2(r,t)$ – квадрат скорости звука, γ – показатель адиабаты, $\nu = 1,2,3$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии течения соответственно.

Условие постоянства энтропии запишем в виде

$$s_0=p\rho^{-\gamma}=\gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma}=\mathrm{const}.\tag{2}$$

Вдоль траектории частицы s_0 имеет постоянное значение. Для гомэнтропических течений эта постоянная одна для всех траекторий. Однако в рассматриваемой гомэнтропической модели, в отличии от моделей Хантера [1], на ударной волне (УВ) s_0 меняется скачком, как и все остальные параметры. Условия ударного перехода определяются тремя законами сохранения:

$$\begin{gathered}\rho_2\left(u_2-D\right)=\rho_1\left(u_1-D\right),\ \rho_2\big[c_2^2+\gamma\left(u_2-D\right)^2\big]=\rho_1\big[c_1^2+\gamma\left(u_1-D\right)^2\big],\\ 2c_2^2+(\gamma-1)(u_2-D)^2=2c_1^2+(\gamma-1)(u_1-D)^2,\end{gathered}$$