БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

В. С. Кожанов, И. А. Чернов

РОЛЬ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В НАХОЖДЕНИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Важное место при исследовании сложных математических моделей занимают точные частные аналитические решения. Они помогают выделить закономерности, свойства и структуру общего решения системы уравнений, описывающей модель. В статье предложен новый метод построения точных решений в гомэнтропической модели одномерной нестационарной газовой динамики, основанный на решении гипергеометрического уравнения. Приведены примеры новых решений.

Основные уравнения в гомэнтропической модели таковы [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial r}=0,\\ \frac{\partial c^2}{\partial t}+u\frac{\partial c^2}{\partial r}+(\gamma-1)c^2\left[\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right]=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где t – время, r – координата, $u=u(r,t)$ – скорость частицы жидкости, $c^2=c^2(r,t)$ – квадрат скорости звука, γ – показатель адиабаты, $\nu = 1,2,3$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии течения соответственно.

Условие постоянства энтропии запишем в виде

$$s_0=p\rho^{-\gamma}=\gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma}=\mathrm{const}.\tag{2}$$

Вдоль траектории частицы s_0 имеет постоянное значение. Для гомэнтропических течений эта постоянная одна для всех траекторий. Однако в рассматриваемой гомэнтропической модели, в отличии от моделей Хантера [1], на ударной волне (УВ) s_0 меняется скачком, как и все остальные параметры. Условия ударного перехода определяются тремя законами сохранения:

$$\begin{gathered}\rho_2\left(u_2-D\right)=\rho_1\left(u_1-D\right),\ \rho_2\big[c_2^2+\gamma\left(u_2-D\right)^2\big]=\rho_1\big[c_1^2+\gamma\left(u_1-D\right)^2\big],\\ 2c_2^2+(\gamma-1)(u_2-D)^2=2c_1^2+(\gamma-1)(u_1-D)^2,\end{gathered}$$

где индексом 1 обозначены параметры течения перед фронтом УВ, а индексом 2 – за фронтом, D – скорость распространения УВ.

Автомодельные решения имеют вид (α – показатель автомодельности)

$$u = \alpha \frac{r}{t} V(\xi) = \alpha C t^{\alpha-1} \xi V(\xi), \ c^2 = \alpha^2 \frac{r^2}{t^2} Z(\xi) = \alpha^2 C^2 t^{2\alpha-2} \xi^2 Z(\xi), \\ \xi = r/\left(C t^{\alpha}\right), \ C = \text{const}. \tag{3}$$

Здесь ξ – независимая автомодельная переменная, а $\xi V(\xi)$ и $\xi^2 Z(\xi)$ – автомодельные представители скорости частицы жидкости u и квадрата скорости звука c^2 соответственно.

После подстановки (3) в (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ), которые приводят к уравнению на фазовой плоскости (V, Z) и квадратуре для определения $\xi(V)$ [2]:

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \frac{(\gamma-1) Z(V)\left(2\alpha\Delta_0 + \Delta_5\right)}{\left[(\gamma-1)\nu\alpha V - 2(1-\alpha)\right]\Delta_0 + (1-V)\Delta_5}, \tag{4}$$

$$\Delta_0 = (1-V)^2 - Z(V),$$
$$\Delta_5 = (\gamma-1)(\nu-1)\alpha V^2 - \left[(\gamma-1)(\nu\alpha-1) + 2(1-\alpha)\right] V + 2(1-\alpha).$$

Уравнение (4) является нелинейным и в общем случае – при произвольных значениях ν, γ, α – не имеет аналитического решения.

Приведем метод построения точного аналитического решения уравнения (4) для случая плоского движения газа. При $\nu = 1$ система (1) упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial c^2}{\partial t} + u\frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma-1)c^2\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

Перейдем на плоскость годографа, меняя ролями зависимые и независимые переменные:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{\partial t}{\partial c^2}, \ \ \frac{\partial u}{\partial t} \sim -\frac{\partial r}{\partial c^2}, \ \ \frac{\partial c^2}{\partial r} \sim -\frac{\partial t}{\partial u}, \ \ \frac{\partial c^2}{\partial t} \sim \frac{\partial r}{\partial u}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим систему для функций t и r:

$$\frac{\partial r}{\partial u} - u\frac{\partial t}{\partial u} + (\gamma-1)c^2\frac{\partial t}{\partial c^2} = 0, \ \ \frac{\partial r}{\partial c^2} - u\frac{\partial t}{\partial c^2} + \frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial t}{\partial u} = 0. \tag{7}$$

Введем автомодельные представители для t и r:

$$t = u^{\beta}\Psi(z), \ r = u^{\alpha\beta}\Phi(z), \ c^2 = A u^2 z, \ \beta = 1/(\alpha-1), \ A = (\gamma-1)^2/4, \tag{8}$$

где z – независимая автомодельная переменная.

Подставляя (8) в (7), получим систему двух ОДУ относительно функций $\Psi(z)$ и $\Phi(z)$, которая может быть сведена к одному ОДУ второго порядка для автомодельного представителя времени

$$z(1-z)\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \left[c - (a+b+1)z\right]\frac{d\Psi}{dz} - ab\Psi = 0, \tag{9}$$

$$a = \frac{\alpha - 2}{2(\alpha - 1)}, \quad b = -\frac{1}{2(\alpha - 1)}, \quad c = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Решение уравнения (9) определяет функцию $\Psi = \Psi(z)$. Функция $\Phi = \Phi(z)$ выражается через функцию $\Psi(z)$ и ее производную по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{\alpha}\left[\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}z\right)\Psi(z) - (\gamma - 1)(\alpha - 1)(1 - z)z\frac{d\Psi(z)}{dz}\right].$$

Из соотношений (4) и (8) вытекают зависимости, представляющие в параметрическом виде решение на фазовой плоскости:

$$V = V(z) = \frac{\Psi(z)}{\alpha\Phi(z)}, \quad Z = Z(z) = Az\frac{\Psi^2(z)}{\alpha^2\Phi^2(z)} = AzV^2. \tag{10}$$

Для получения явной формулы $Z = Z(V)$ необходимо первое соотношение (10) разрешить относительно z и полученное представление $z = z(V)$ подставить во второе соотношение (10).

Вернемся к уравнению (9). Это невырожденное гипергеометрическое уравнение с параметрами a, b и c. Для него существуют [3] 24 решения Куммера, которые, будучи записанными в виде рядов, имеют вид

$$\Psi_i(z) = z^{\tau_i}(1-z)^{\sigma_i}F(a_i, b_i; c_i; z_i) = z^{\tau_i}(1-z)^{\sigma_i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_i)_n(b_i)_n}{(c_i)_n n!}z_i^n, \tag{11}$$

где a_i, b_i, c_i, τ_i, σ_i – линейные функции от a, b, c; $F(a_i, b_i; c_i; z_i)$ – гипергеометрическая функция Гаусса; $z_i = f_i(z)$, $f_i(z) \in \{z, 1 - 1/z, 1 - z, z/(1-z), 1/z, 1/(1-z)\}$.

Известно, что когда $a_i = -m$ или $b_i = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то соответствующий гипергеометрический ряд (11) обрывается. В этом случае решение на плоскости (V, Z) может быть получено в конечной форме. В таблице перечислены значения α, при которых (11) вырождается (номера решений Куммера соответствуют [3]).

№	Решение Куммера	Показатель α	№	Решение Куммера	Показатель α
1	$\Psi_1,\ \Psi_3,\ \Psi_5,\ \Psi_7,\ \Psi_9,\ \Psi_{11}$	$\frac{2(1+m)}{1+2m}$	5	Ψ_{10}	$\frac{1+2m}{2(1+m)}$
2	$\Psi_2,\ \Psi_4,\ \Psi_{21},\ \Psi_{23}$	$\frac{2[(\gamma-1)m+1]}{2(\gamma-1)m+\gamma+1}$	6	$\Psi_{14},\ \Psi_{18},\ \Psi_{22}$	$\frac{2m}{1+2m}$
3	$\Psi_6,\ \Psi_{12},\ \Psi_{17},\ \Psi_{19}$	$\frac{2[(\gamma-1)m+\gamma-2]}{2(\gamma-1)m+\gamma-3}$	7	Ψ_{15}	$\frac{1+2m}{2m}$
4	$\Psi_8,\ \Psi_{13},\ \Psi_{16},\ \Psi_{20}$	$\frac{2(\gamma-1)m+\gamma-3}{2[(\gamma-1)m-1]}$	8	Ψ_{24}	$\frac{2(\gamma-1)m+\gamma+1}{2[(\gamma-1)m+\gamma]}$

Приведем некоторые новые автомодельные решения плоской гомэнтропической модели (первая цифра нижнего индекса отвечает значению m, вторая — № из табл.).

$\alpha = 4/3:$

$$V_{11}(z) = \frac{2\left[3(\gamma-1)z+2\gamma\right]}{(\gamma-1)^2z^2+4(\gamma-1)(\gamma-2)z-4\gamma},$$

$$Z_{11}(V) = \frac{\gamma-1}{4}V\left[-2(\gamma-2)V-3\pm\sqrt{4(\gamma^2-3\gamma+4)V^2+8(\gamma-3)V+9}\,\right];$$

$\alpha = \dfrac{3\gamma-1}{2(2\gamma-1)}:$

$$V_{18}(z) = \frac{4(2\gamma-1)\left[3(\gamma-1)z+2\gamma\right]}{3(\gamma-1)^3z^2+6(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma-1)z+8\gamma(2\gamma-1)},$$

$$Z_{18}(V) = \frac{V}{12}\Big[-3(2\gamma-1)\left[(\gamma+1)V-2\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{3}\sqrt{(2\gamma-1)\left[\left(2\gamma^2+\gamma+3\right)V^2-4\left(4\gamma^2+5\gamma-3\right)V+24\gamma-12\right]}\,\Big];$$

$\alpha = 4/5:$

$$V_{26}(z) = \frac{15(\gamma-1)^2z^2+60(\gamma-1)(2\gamma-3)z+20(\gamma-2)(2\gamma-3)}{30(\gamma-1)^3z^2+20(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma-1)z+16(\gamma-2)(2\gamma-3)},$$

$$Z_{26}(V) = \frac{(\gamma-1)V^2}{6\left[2(\gamma-1)V-1\right]}\Big[-(2\gamma-3)\left[(\gamma+1)V-3\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{(\gamma-7/5)(2\gamma-3)\left[\left(2\gamma^2-\gamma+9\right)V^2+24(\gamma-5)V+48\right]}\,\Big].$$

Точные автомодельные решения, выходящие за рамки плоской гомэнтропической модели (плоская негомэнтропическая модель, а также случаи цилиндрической и сферической симметрии течения), предлагается искать методом неопределенных коэффициентов, используя найденные функциональные формы решений и привлекая средства компьютерной алгебры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хантер К.* О захлопывании пустой полости в воде // Механика: период. сб. пер. иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.

2. *Кожанов В. С.* Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 44–54.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

УДК 533.6.011

Д. И. Ливеровский, С. П. Шевырев

МЕТОД ДАВЫДОВА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

В случае моделирования движения несжимаемой тяжелой жидкости со свободной поверхностью необходимо определять положение этой поверхности в процессе решения, а также учитывать влияние земного тяготения. В данной статье такая задача решалась численным методом Давыдова [1] на регулярной сетке в случае двух пространственных переменных. Для определения положения свободной поверхности использовался метод маркеров [2, 3].

В ходе выполнения работы была написана программа на языке Python, реализующая метод Давыдова для случая тяжелой несжимаемой жидкости.

Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости для случая двух пространственных переменных моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial y} = -g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где u, v – компоненты вектора скорости; ρ – давление; ρ_0 – постоянная плотность; g – ускорение свободного падения.