БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М., Серебряков А. В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2.

2. *Афонин С. М.* Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002.

3. *Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М.* Динамика пьезогироскопа при работе в импульсном режиме // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 3. С. 63–66.

4. *Распопов В. Я.* Микромеханические приборы : учебное пособие // М. : Машиностроение. 2007. 400 с.

УДК 629.78

**Я. Г. Сапунков**

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

С помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления встречей за минимальный промежуток времени двух космических аппаратов (КА), один из которых неуправляемый и движется только под действием силы притяжения к Солнцу, второй аппарат управляется с помощью солнечного паруса. Приведены результаты численного решения задачи.

**Постановка задачи.** KS-переменные $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ [1] связаны с векторами положения центра масс КА и его скорости $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ соотношениями (1.2) из [2]. Переменная $h$ – полная энергия единицы массы КА, $M$ – масса притягивающего центра, $\gamma$ – гравитационная постоянная, $\tau$ – независимая переменная, связанная с временем $t$ уравнением $dt/d\tau = u^2$.

Тяга солнечного паруса, отнесенная к единице массы КА, определяется по формуле, в которой $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости паруса, обращенной от Солнца, $\vartheta$ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, $d$ – коэффициент, характеризующий площадь паруса:

$$\mathbf{p} = d\frac{\cos^2\vartheta}{r^2}\mathbf{n} = d\left(\mathbf{u}^2\right)^{-4}\left(P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{u}, \mathbf{n}\right)^2\mathbf{n}.$$

Если через $R$ обозначить характерный масштаб длины, например радиус орбиты Земли, на которой находится управляемый аппарат в начальный момент времени, то связь между размерными и безразмерными переменными будет определяться соотношениями:

$$\mathbf{u} = R^{1/2}\mathbf{u}^*; \qquad \mathbf{s} = (\gamma M)^{1/2}\mathbf{s}^*; \;\; h = \frac{\gamma M}{R}h^*; \;\; \tau = \left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2}\tau^*;$$
$$t = R\left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2} t^*; \;\; d = \gamma M d^*; \qquad \mathbf{r} = R\mathbf{r}^* \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{\gamma M}{R}\right)^{1/2}\mathbf{v}^*.$$

Далее будут использоваться только безразмерные величины, верхний индекс «*» над которыми опускается. Движение неуправляемого аппарата $A$ в безразмерных KS-переменных определяется через переменную $\tau_a$ соотношениями

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_a = \mathbf{C}\cos(k\tau_a) + \mathbf{D}\sin(k\tau_a) \;\; \mathbf{s}_a = k\left(\mathbf{D}\cos(k\tau_a) - \mathbf{C}\sin(k\tau_a)\right);\\
&k = \left(-\frac{1}{2}h_a\right)^{1/2}; \;\; h_a = -(C^2 + D^2)^{-1} < 0; \;\; t = \int\limits_{\tau}^{\tau_a} (\mathbf{u}_a)^2\, d\tau_a;\\
&\tau_a \geq \tau; \qquad \mathbf{C} = \mathrm{const}; \qquad \mathbf{D} = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения движения управляемого КА, в которых единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ является управляющим параметром, с учетом $\tau_a$ в безразмерных KS-переменных имеют вид (см. [1, 2])

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{s}, \;\; \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = \frac{1}{2}h\mathbf{u} + \frac{1}{2}d\left(\mathbf{u}^2\right)^{-3}\left(P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{u}, \mathbf{n}\right)^2 P(\mathbf{u})\,\mathbf{n},\\
&\frac{dh}{d\tau} = 2d\left(\mathbf{s}, P(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{u}^2\right)^{-4}\left(P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{u}, \mathbf{n}\right)^2, \;\; \frac{d\tau_a}{d\tau} = \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{u}_a^2(\tau_a)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

В KS-переменных время перелета, которое характеризует качество процесса управления, определяется функционалом, принимающим минимальное значение для оптимального процесса управления:

$$I = \int\limits_0^{\tau_k} \mathbf{u}^2 d\tau. \tag{3}$$

Начальное состояние управляемого аппарата и начальное значение $\tau_a$ определяются соотношениями при $\tau = 0$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{н}}, \;\; \mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{н}}, \;\; h = h_{\text{н}}, \;\; \tau_a = \tau_{a\text{н}}. \tag{4}$$

В конечный «момент времени» $\tau = \tau_k$, который заранее не задается, управляемая система (2) в пространстве $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, h, \tau_a)$ в случае мягкой встречи должна находиться на многообразии

$$\begin{aligned}
&P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{u}(\tau_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k));\\
&P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{s}(\tau_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{s}_a(\tau_a(\tau_k)).
\end{aligned} \tag{5}$$

**Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина**. Функция Гамильтона — Понтрягина для управляемой системы (2) имеет вид

$$H = -u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \frac{1}{2} h(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) + du^{-8} \left(P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{n}\right)^2 (\mathbf{q}, P(\mathbf{u})\mathbf{n}) + \\ + \vartheta \frac{\mathbf{u}^2}{(\mathbf{u_a}(\tau_\mathbf{a}))^2}, \quad \mathbf{q} = \frac{u^2}{2}\mathbf{v} + 2\eta \mathbf{s}. \tag{6}$$

Сопряженные переменные $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau_a}. \tag{7}$$

Из условия максимума для функции (6) оптимальное управление, единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ к солнечному парусу, определяется по формуле

$$\mathbf{n} = z\frac{\mathbf{r}}{r} + b^{-1}\left(z - \frac{2}{3z}\right)\frac{\mathbf{R}_1}{r}, \quad z = \left[\frac{1}{6}\left(4 - a^2 + a\sqrt{8 + a^2}\right)\right]^{1/2}, \\ a = b\frac{r}{|P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}, \quad b = \frac{(P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}, \mathbf{r})}{r^2}, \quad \mathbf{R}_1 = P^T(\mathbf{u})\mathbf{q} - b\mathbf{r}. \tag{8}$$

На правом подвижном конце траектории при $\tau = \tau_k$ должны выполняться условия трансверсальности. В случае мягкой встречи они имеют вид

$$l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}) = 0; \quad l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) = 0; \quad \eta = 0; \quad \vartheta + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{9}$$

Кроме того, так как $\tau_k$ заранее не задается, то при $\tau = \tau_k$

$$H_{opt}\big|_{\tau_k} = 0. \tag{10}$$

Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных. В случае мягкой встречи необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (2), (7), в которых управляющий параметр $\mathbf{n}$ определяется согласно (8) с начальными условиями (4) при $\tau = 0$ и граничными условиями (5), (9), (10) при $\tau = \tau_k$ .

**Примеры численного решения задачи.** Краевая задача, к которой принцип максимума Понтрягина сводит решение поставленной задачи оптимального управления, численно решается методом Ньютона.

В начальный момент времени управляемый аппарат находится на орбите Земли. В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой находится в центре Солнца, а плоскость $Ox_1x_2$ совпадает с плоскостью орбиты Земли, в безразмерных переменных положение и скорость управляемого аппарата определяются координатами $x_1 = 1.0$, $x_2 = 0.0$, $x_3 = 0.0$, $v_1 = 0.0$, $v_2 = 1.0$, $v_3 = 0.0$. Неуправляемый аппарат находится на орбите Марса и его начальное положение сдвинуто на угол $\varphi_0$ относительно управляемого аппарата. Безразмерное значение величины, характеризующей площадь солнечного паруса, $d = 0.1$. Орбита неуправляемого аппарата имеет наклон к плоскости орбиты Земли. В таблице для различных значений угла $\varphi_0$ приводятся длительности полета управляемого аппарата в безразмерных переменных и в земных годах, безразмерные координаты места мягкой встречи аппаратов.

| $\varphi_0,^\circ$ | Время полета | Время полета в земных годах | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 9.6764 | 1.5400 | 1.4972 | 0.2732 | 0.1013 |
| 90 | 10.1976 | 1.6230 | 1.1441 | 1.0022 | 0.1073 |
| 120 | 11.1576 | 1.7726 | –0.2770 | 1.4946 | 0.0970 |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

2. *Сапунков Я. Г.* Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428–433.