ных действий алгоритма, не связанных с пересылкой данных, время значительно сокращается.


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Недорезов П. Ф.* Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки – полосы // Теоретическая и прикладная механика : науч.-техн. сб. Харьков, 2002. Вып. 35. С. 139–146.

2. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикладная механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.

3. URL : http://alexeivinogradov.narod.ru/

4. *Антонов А. С.* Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М., 2009.

5. *Антонов А. С.* Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М., 2004.



УДК 629



**В. Г. Бирюков, В. Ю. Вахлюев**


# ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА


Рассмотрена задача оптимальной остановки вращательного движения твердого тела. Построен закон оптимального управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость неподвижного положения твердого тела и доставляющий минимум интегральному квадратичному функционалу качества переходного процесса.


**1. Постановка задачи.** Вращательное движение твердого тела описывается системой динамических уравнений Эйлера [1]

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $I_1, I_2, I_3$ – осевые моменты инерции твердого тела, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной с телом системы координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции твердого тела, $M_1, M_2, M_3$ – проекции момента внешних сил, действующих на твердое тело, на оси связанной системы координат, верхняя точка означает дифференцирование по времени.

Задача заключается в построении управляющих воздействий $M_1$, $M_2$, $M_3$, переводящих твердое тело, движение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1), из начального состояния

$$\omega_1(0) = \omega_1^0,\ \ \omega_2(0) = \omega_2^0,\ \ \omega_3(0) = \omega_3^0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$\omega_1 = 0,\ \ \omega_2 = 0,\ \ \omega_3 = 0 \tag{3}$$

асимптотически устойчивым образом. При этом должен принимать наименьшее значение функционал качества переходного процесса, характеризующий отклонение по угловым скоростям «в среднем» и общие энергетические затраты на управление:

$$I = \int_0^{\infty} \left(\alpha_1 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) + \alpha_2 \left(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2\right)\right) dt, \tag{4}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} > 0$.

Будем полагать, что на управляющие воздействия $M_1$, $M_2$, $M_3$ не наложены никакие ограничения.

**2. Метод решения задачи.** Сформулированную задачу будем решать с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина [2]. Составим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$\begin{aligned} H = -\left(\alpha_1 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) + \alpha_2 \left(I_1^2 u_1^2 + I_2^2 u_2^2 + I_3^2 u_3^2\right)\right) + \\ +\psi_1 \left(u_1 - a_1 \omega_2 \omega_3\right) + \psi_2 \left(u_2 - a_2 \omega_1 \omega_3\right) + \psi_3 \left(u_3 - a_3 \omega_1 \omega_2\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_1}$, $a_2 = \frac{I_1 - I_3}{I_2}$, $a_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3}$, $u_1 = \frac{M_1}{I_1}$, $u_2 = \frac{M_2}{I_2}$, $u_3 = \frac{M_3}{I_3}$, $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ – сопряженные переменные, которые должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 2\alpha_1 \omega_1 + a_2 \psi_2 \omega_3 + a_3 \psi_3 \omega_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 2\alpha_1 \omega_2 + a_1 \psi_1 \omega_3 + a_3 \psi_3 \omega_1, \\ \dot{\psi}_3 &= 2\alpha_1 \omega_3 + a_1 \psi_1 \omega_2 + a_2 \psi_2 \omega_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Структуру оптимального управления найдем из условия максимума функции Гамильтона — Понтрягина (5). Для неограниченного управления имеем

$$u_1^{opt} = \frac{\psi_1}{2\alpha_2 I_1^2},\ \ u_2^{opt} = \frac{\psi_2}{2\alpha_2 I_2^2},\ \ u_3^{opt} = \frac{\psi_3}{2\alpha_2 I_3^2}. \tag{7}$$

Подставляя полученную структуру оптимального управления (6) в уравнения (1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{\psi_1}{2\alpha_2 I_1^2} - a_1\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\psi_2}{2\alpha_2 I_2^2} - a_2\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{\psi_3}{2\alpha_2 I_3^2} - a_3\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Будем искать решение для сопряженных переменных в виде

$$\psi_1 = A_1\omega_1,\ \psi_2 = A_2\omega_2,\ \psi_3 = A_3\omega_3, \tag{9}$$

где $A_1, A_2, A_3$ – подлежащие определению константы. Подставим соотношения (9) в уравнения (6) и (8). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{A_1\omega_1}{2\alpha_2 I_1^2} - a_1\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{A_2\omega_2}{2\alpha_2 I_2^2} - a_2\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{A_3\omega_3}{2\alpha_2 I_3^2} - a_3\omega_1\omega_2, \\ A_1\dot{\omega}_1 &= 2\alpha_1\omega_1 + (a_2A_2 + a_3A_3)\,\omega_2\omega_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= 2\alpha_1\omega_2 + (a_1A_1 + a_3A_3)\,\omega_1\omega_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= 2\alpha_1\omega_3 + (a_1A_1 + a_2A_2)\,\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Из уравнений (10) следует, что для того чтобы выражения (9) являлись частным решением задачи, постоянные $A_1, A_2, A_3$ должны иметь следующие значения:

$$A_1 = \pm 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}I_1,\ A_2 = \pm 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}I_2,\ A_3 = \pm 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}I_3. \tag{11}$$

Таким образом, закон оптимального управления, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности, имеет вид

$$u_1^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2 I_1}\omega_1,\ u_2^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2 I_2}\omega_2,\ u_3^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2 I_3}\omega_3,$$

или для управляющих моментов

$$M_1^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_1,\ M_2^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_2,\ M_3^{opt} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_3. \tag{12}$$

Знак в соотношениях (12) должен быть выбран таким образом, чтобы построенный закон управления обеспечивал асимптотически устойчивый перевод твердого тела из начального состяния (2) в конечное состояние (3).

Для доказательства устойчивости воспользуемся вторым методом Ляпунова [3]. Функцию Ляпунова примем равной кинетической энергии твердого тела, которая является положительно определенной функцией

$$V = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right). \tag{13}$$

Производная от функции Ляпунова (13), вычисленная в силу дифференциальных уравнений движения (1), замкнутых законом оптимального управления (12), равна

$$\dot{V} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_1^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_2^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_3^2. \tag{14}$$

Следовательно, если будет выбран знак «–», то производная от функции Ляпунова (14), вычисленная в силу дифференциальных уравнений (1), будет знакоопределенной отрицательной. Таким образом, для обеспечения асимптотически устойчивого перевода твердого тела из начального состояния (2) в конечное состояние (3) в законе оптимального управления (12) нужно выбрать знак «–».


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики : в 2 ч. М. : Наука, 1966. Ч. 2. 332 с.

2. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 392 с.

3. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М. : Наука, 1971. 312 с.



УДК 517.51



**А. В. Доль, Ю. П. Гуляев**


## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследования динамики кровотока на сегодняшний день являются одним из важнейших направлений в медицине и механике. Это связано с необходимостью прогнозирования последствий оперативного вмешательства и профилактики сердечно-сосудистых заболеваний. Поэтому