УДК 629

А. С. Антипова, В. Г. Бирюков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена задача кинематического оптимального пространственного разворота твердого тела. Проведено аналитическое исследование задачи. Приведены результаты численного решения такой задачи.

1. Постановка задачи. Угловое движение твердого тела описывается кватернионным дифференциальным кинематическим уравнением [1, 2]

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \tag{1}$$

где $\bar{\lambda}$ – кватернион, характеризующий ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат, $\bar{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси связанной системы координат, знак «$\circ$» означает кватернионное произведение, а точка — дифференцирование по времени.

Требуется построить управление (в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$), переводящее твердое тело из заданного начального углового положения

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0 \tag{2}$$

в требуемое конечное угловое положение

$$\bar{\lambda}(T) = \bar{\lambda}^T \tag{3}$$

и доставляющее минимум функционалу качества

$$I = \int_0^T \left(\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2\right) dt, \tag{4}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \mathrm{const} > 0$ – весовые множители функционала. Функционал (4) характеризует общие энергетические затраты на управление. Управление полагаем неограниченным, а время переориентации T – фиксированным.

2. Метод решения задачи. Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [3]. Составим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$\begin{aligned} H = -(\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2) - \frac{1}{2}\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) + \\ + \frac{1}{2}\psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) + \frac{1}{2}\psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) + \\ + \frac{1}{2}\psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\psi_j (j = \overline{0,\ 3})$ – сопряженные переменные, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} 2\dot{\psi}_0 &= -\psi_1\omega_1 - \psi_2\omega_2 - \psi_3\omega_3, \\ 2\dot{\psi}_1 &= \psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2, \\ 2\dot{\psi}_2 &= \psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3, \\ 2\dot{\psi}_3 &= \psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Для неограниченного управления из условия максимума функции Гамильтона — Понтрягина (5) находим

$$\omega_1^{opt} = \frac{p_1}{4\alpha_1}, \quad \omega_2^{opt} = \frac{p_2}{4\alpha_2}, \quad \omega_3^{opt} = \frac{p_3}{4\alpha_3}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= -\psi_0\lambda_1 + \psi_1\lambda_0 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2, \\ p_2 &= -\psi_0\lambda_2 - \psi_1\lambda_3 + \psi_2\lambda_0 + \psi_3\lambda_1, \\ p_3 &= -\psi_0\lambda_3 + \psi_1\lambda_2 - \psi_2\lambda_1 + \psi_3\lambda_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя соотношения (8) по времени и учитывая уравнения (1), (6) и выражения для оптимального управления (7), приходим к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \\ \alpha_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \\ \alpha_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(\alpha_1 - \alpha_3) = 0, \\ \alpha_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

с начальным условием (2) и конечным условием (3).

В частном случае, когда весовые коэффициенты функционала (4) равны между собой, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, задача была решена аналитически. В случае, когда равны между собой только два из трех весовых множителя функционала (4), задача сводится к решению системы четырех трансцендентных уравнений, которая решалась численно. В общем случае, когда $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеют произвольные значения, задача также решалась численно.

3. Численное решение задачи. Для численного решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с краевыми условиями (2) и (3) была разработана программа на языке программирования C#, реализующая метод Ньютона для решения краевых задач оптимального управления [4]. В качестве начального приближения для метода Ньютона использовалось частное аналитическое решение, построенное для случая, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Приведем пример численного решения задачи. Кватернионы начальной и конечной ориентации

$$\lambda_0^0 = -0.58213, \lambda_1^0 = 0.10822, \lambda_2^0 = 0.641196, \lambda_3^0 = -0.48815;$$

$$\lambda_0^T = 1, \lambda_1^T = 0, \lambda_2^T = 0, \lambda_3^T = 0.$$

Весовые коэффициенты функционала $\alpha_1 = 1000, \alpha_2 = 2000, \alpha_3 = 5000$. Время переориентации $T = 300$ с.

Результаты численного решения приведены на рис. 1, рис. 2 в виде графиков изменения компонент вектора абсолютной угловой скорости твердого тела (управления) и графиков изменения компонент кватерниона ориентации (фазовых координат) в процессе управления угловым движением.

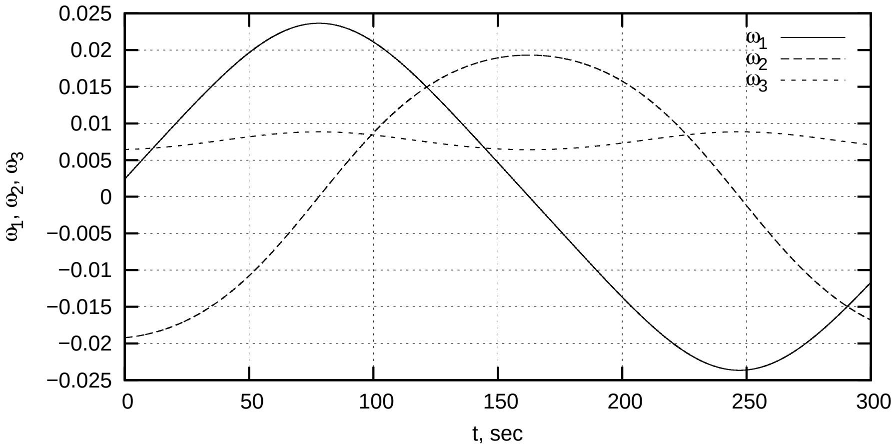

Рис. 1

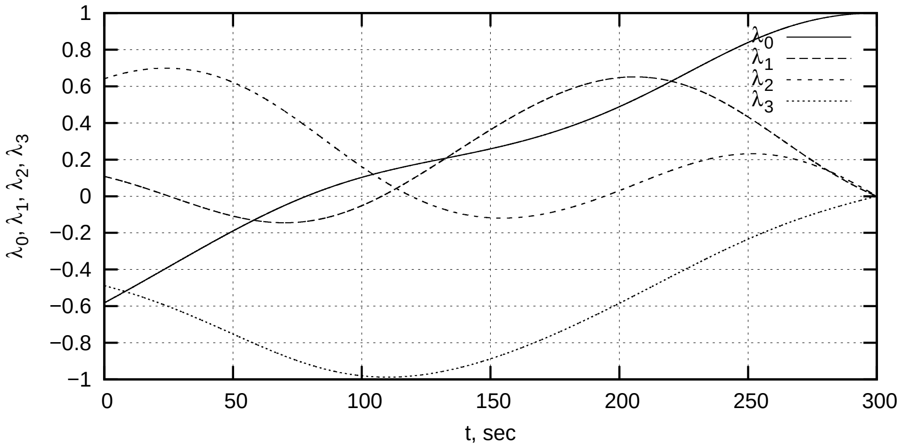

Рис. 2

Из рис. 1, 2 овидно, что построенный закон оптимального управления обеспечивает перевод твердого тела из заданного начального в требуемое конечное угловое положение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.

2. *Бранец В.Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.

3. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 392 с.

4. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.

А. А. Барышев, М. А. Федукина

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВИБРАЦИОННОГО ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ – ПОЛОСЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье рассматривается пластинка толщины h и шириной a, изготовленная из вязкоупругого материала. Срединная плоскость пластинки отнесена к декартовой системе координат, как показано на рис. 1.

Считается, что рассматриваемая пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по внешней плоскости $z = -h/2$ поперечной нагрузки: