(винклеровской) подложкой, при котором перемещение и нормальное напряжение связаны равенством

$$\sigma(0,t) = -H \cdot u_k(0,t), \quad k = 1,2, \tag{5}$$

а также непрерывный контакт пластины с упругим полупространством. В последнем случае предполагалось распространение упругих волн в полупространстве.

Проведены расчеты для гармонического внешнего воздействия $U(t) = U_0 \sin \beta t$. Получена зависимость амплитуды тока от частоты колебаний β, определены перемещения $u_k(x_k, t)$.

При использовании в задаче граничных условий вида (5) изучено влияние коэффициента жесткости H на характеристики выходного тока. При возрастании жесткости наблюдалось увеличение амплитуды тока при одновременном уменьшении резонансного значения β. Моделируя в численных экспериментах неограниченный рост жесткости H, получаем результаты, совпадающие с расчетами при жестком закреплении (см. [1]).

Расчет для пластин, контактирующих с упругим полупространством, показал, что отношение s_{33}/s_w упругой податливости пьезокерамики к податливости s_w материала полупространства оказывает существенное влияние на амплитудно-частотную характеристику. Явно выраженный пик на характеристике наблюдается в случае, когда величины s_{33} и s_w различаются значительно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.

УДК 629

И. А. Панкратов, Ю. Н. Челноков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОТКЛОНЕНИЯХ

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА) в случае минимизации интегрального квадратичного (относительно фазовых переменных и управления) функционала качества. Для постоянного управления найдено аналитическое решение фазовых и сопряженных уравнений задачи переориентации круговой орбиты КА в отклонениях.

В работе [1] показано, что фазовые и сопряженные дифференциальные уравнения нелинейной краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА в отклонениях имеют вид

$$\begin{aligned} &2\frac{d\Delta\mathbf{\Lambda}}{dt} = \Delta\mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = \frac{ur}{c}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\,\boldsymbol{i}_2), \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad c = \text{const}, \quad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 2\frac{d\Delta\mathbf{M}}{dt} &= 4\alpha_1 \mathrm{vect}\Delta\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{M}\circ\mathbf{\Omega}_\xi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= 2\frac{\chi}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{ur}{c}\left(\Delta N_1\sin\varphi - \Delta N_2\cos\varphi\right) - \\ &\quad -\frac{ur^2}{2c^2}\big(\Delta N_1\cos\varphi + \Delta N_2\sin\varphi\big). \end{aligned} \tag{2}$$

При этом минимизируемый функционал имеет вид

$$\int\limits_0^{t_1} (\alpha_1[\Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2)\,dt, \quad \alpha_1,\alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА, r – модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА, c – постоянная площадей, p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, φ – истинная аномалия; u – алгебраическая величина ограниченного по модулю реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты КА. Переменная $\Delta\mathbf{\Lambda}$ характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\mathbf{\Lambda}^*$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^*\circ\Delta\mathbf{\Lambda}$ [2]. Переменные $\Delta\mathbf{M} = \Delta\mathrm{M}_0 + \Delta\mathrm{M}_1\boldsymbol{i}_1 + \Delta\mathrm{M}_2\boldsymbol{i}_2 + \Delta\mathrm{M}_3\boldsymbol{i}_3$ и χ являются сопряженными по отношению к фазовым переменным $\Delta\mathbf{\Lambda}$ и φ. $\Delta\mathrm{N}_1$, $\Delta\mathrm{N}_2$ – компоненты кватерниона

$$\Delta\mathbf{N} = \widetilde{\Delta\mathbf{\Lambda}}\circ\Delta\mathbf{M}.$$

Верхняя волна – символ сопряжения.

Аналитическое решение уравнений (1), (2) для произвольного управления неизвестно. В работе [3] было найдено аналитическое решение фазовых уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного управления. Аналогичное решение в этом случае имеет кватернионное дифференциальное уравнение (1), в котором осуществлен переход к новой независимой переменной – истинной аномалии:

$$\Delta\Lambda_0 = C_1^\Delta \cos[s^+(\varphi-\varphi_0)] + C_2^\Delta \sin[s^+(\varphi-\varphi_0)] + \\ + C_3^\Delta \cos[s^-(\varphi-\varphi_0)] + C_4^\Delta \sin[s^-(\varphi-\varphi_0)].$$

Здесь $s^+ = 0.5\sqrt{2+N^2+\sqrt{4+4N^2}}$, $s^- = 0.5\sqrt{2+N^2-\sqrt{4+4N^2}}$, $C_j^\Delta, j = \overline{1,4}$, – произвольные постоянные интегрирования, находимые из начальных условий; $N = ur^3/c^2$, $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Кватернионное дифференциальное уравнение (2) способом, описанным в [3], сводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно скалярной части кватерниона $\Delta\mathbf{M}$:

$$2\frac{d^4\Delta\mathrm{M}_0}{d\varphi^4} + (2+N^2)\frac{d^2\Delta\mathrm{M}_0}{d\varphi^2} + \frac{N^4}{8}\Delta\mathrm{M}_0 = A\cos\left[s^+\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] + \\ + B\sin\left[s^+\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] + C\cos\left[s^-\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] + D\sin\left[s^-\left(\varphi-\varphi_0\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь $A = F\left(C_2^\Delta, C_1^\Delta, s^+\right)$, $B = F\left(-C_1^\Delta, C_2^\Delta, s^+\right)$, $C = F\left(C_4^\Delta, C_3^\Delta, s^-\right)$, $D = F\left(-C_3^\Delta, C_4^\Delta, s^-\right)$, $F(x, y, s) = \alpha_1 r^2 s\left[2ys - x\left(2+N^2-s^2\right)\right]/c$.

Общее решение (3), найденное с помощью метода вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Delta\mathrm{M}_0 = \left(C_1(\varphi)+D_1^\Delta\right)\cos[s^+(\varphi-\varphi_0)] + \left(C_2(\varphi)+D_2^\Delta\right)\sin[s^+(\varphi-\varphi_0)] + \\ + \left(C_3(\varphi)+D_3^\Delta\right)\cos[s^-(\varphi-\varphi_0)] + \left(C_4(\varphi)+D_4^\Delta\right)\sin[s^-(\varphi-\varphi_0)].$$

Здесь

$$2s^+\left[\left(s^-\right)^2-\left(s^+\right)^2\right]\left(C_1(\varphi)+D_1^\Delta\right) = h_1(\varphi) = -\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2s^+}\sin\left[2s^+\left(\varphi-\varphi_0\right)+\right. \\ \left.+\alpha\right] + B\left(\varphi-\varphi_0\right) + \sqrt{C^2+D^2}\left\{\frac{\sin\left[\left(s^+-s^-\right)\left(\varphi-\varphi_0\right)-\beta\right]}{s^+-s^-} - \right. \\ \left. - \frac{\sin\left[\left(s^++s^-\right)\left(\varphi-\varphi_0\right)+\beta\right]}{s^++s^-}\right\},$$

$$2s^+\left[\left(s^-\right)^2-\left(s^+\right)^2\right]\left(C_2(\varphi)+D_2^\Delta\right) = h_2(\varphi),$$

$$2s^-\left[\left(s^+\right)^2-\left(s^-\right)^2\right]\left(C_3(\varphi)+D_3^\Delta\right) = h_3(\varphi),$$

$$2s^-\left[\left(s^+\right)^2-\left(s^-\right)^2\right]\left(C_4(\varphi)+D_4^\Delta\right) = h_4(\varphi),$$

$h_j(\varphi)$, $j = \overline{2,4}$, – сложные функции, имеющие такую же структуру, как и $h_1(\varphi)$; $\operatorname{tg}\alpha = A/B$, $\operatorname{tg}\beta = C/D$; D_j^Δ, $j = \overline{1,4}$, – произвольные постоянные интегрирования, находимые из начальных условий.

Компоненты векторной части сопряженного кватерниона имеют вид

$$\Delta \mathrm{M}_1 = A(s^+)\begin{pmatrix} B(s^+,\,\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,C_1(\varphi),\,C_2(\varphi),\,D_2^{\Delta},\,D_1^{\Delta},\,C_2^{\Delta}) \\ B(s^+,\,\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,C_2(\varphi),\,-C_1(\varphi),\,-D_1^{\Delta},\,D_2^{\Delta},\,-C_1^{\Delta}) \end{pmatrix} +$$

$$+A(s^-)\begin{pmatrix} B(s^-,\,\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,C_3(\varphi),\,C_4(\varphi),\,D_4^{\Delta},\,D_3^{\Delta},\,C_4^{\Delta}) \\ B(s^-,\,\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,C_4(\varphi),\,-C_3(\varphi),\,-D_3^{\Delta},\,D_4^{\Delta},\,-C_3^{\Delta}) \end{pmatrix},$$

$$\Delta \mathrm{M}_2 = A(s^+)\begin{pmatrix} B(s^+,\,\sin\varphi,\,-\cos\varphi,\,C_1(\varphi),\,C_2(\varphi),\,D_2^{\Delta},\,D_1^{\Delta},\,C_2^{\Delta}) \\ B(s^+,\,\sin\varphi,\,-\cos\varphi,\,C_2(\varphi),\,-C_1(\varphi),\,-D_1^{\Delta},\,D_2^{\Delta},\,-C_1^{\Delta}) \end{pmatrix} +$$

$$+A(s^-)\begin{pmatrix} B(s^-,\,\sin\varphi,\,-\cos\varphi,\,C_3(\varphi),\,C_4(\varphi),\,D_4^{\Delta},\,D_3^{\Delta},\,C_4^{\Delta}) \\ B(s^-,\,\sin\varphi,\,-\cos\varphi,\,C_4(\varphi),\,-C_3(\varphi),\,-D_3^{\Delta},\,D_4^{\Delta},\,-C_3^{\Delta}) \end{pmatrix},$$

$$\Delta \mathrm{M}_3 = A(s^+)\begin{pmatrix} E(s^+,\,C_1(\varphi),\,C_2(\varphi),\,D_2^{\Delta},\,C_1^{\Delta}) \\ E(s^+,\,C_2(\varphi),\,-C_1(\varphi),\,-D_1^{\Delta},\,C_2^{\Delta}) \end{pmatrix} +$$

$$+A(s^-)\begin{pmatrix} E(s^-,\,C_3(\varphi),\,C_4(\varphi),\,D_4^{\Delta},\,C_3^{\Delta}) \\ E(s^-,\,C_4(\varphi),\,-C_3(\varphi),\,-D_3^{\Delta},\,C_4^{\Delta}) \end{pmatrix},$$

где

$$A(s) = (\cos[s(\varphi-\varphi_0)] \quad \sin[s(\varphi-\varphi_0)]),$$

$$B(s,\,f(\varphi),\,g(\varphi),\,v(\varphi),w(\varphi),\,a,\,b,\,c) = -2f(\varphi)\left[v'(\varphi)+s\left(w(\varphi)+a\right)\right]/N+$$

$$+g(\varphi)\left\{\frac{2}{N}\left[v''(\varphi)+2sw'(\varphi)+\left(\frac{N^2}{4}-s^2\right)\left(v(\varphi)+b\right)\right]-\frac{4\alpha_1}{N}c\right\},$$

$$E(s,\,v(\varphi),w(\varphi),\,a,\,b) = -4\left[v'''(\varphi)+3sw''(\varphi)+\left(1+\frac{N^2}{4}-3s^2\right)v'(\varphi)+\right.$$

$$\left.+\left(s^2-1-\frac{N^2}{4}\right)s\left(w(\varphi)+a\right)\right]+2\alpha_1 b\left[-\frac{4\left(1+N^2\right)}{N^2}s^2+N\right].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата в отклонениях // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 174–176.

2. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

3. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.