перевод твердого тела из начального состяния (2) в конечное состояние (3).

Для доказательства устойчивости воспользуемся вторым методом Ляпунова [3]. Функцию Ляпунова примем равной кинетической энергии твердого тела, которая является положительно определенной функцией

$$V = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right). \tag{13}$$

Производная от функции Ляпунова (13), вычисленная в силу дифференциальных уравнений движения (1), замкнутых законом оптимального управления (12), равна

$$\dot{V} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_1^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_2^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\omega_3^2. \tag{14}$$

Следовательно, если будет выбран знак «–», то производная от функции Ляпунова (14), вычисленная в силу дифференциальных уравнений (1), будет знакоопределенной отрицательной. Таким образом, для обеспечения асимптотически устойчивого перевода твердого тела из начального состояния (2) в конечное состояние (3) в законе оптимального управления (12) нужно выбрать знак «–».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики : в 2 ч. М. : Наука, 1966. Ч. 2. 332 с.

2. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 392 с.

3. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М. : Наука, 1971. 312 с.

УДК 517.51

А. В. Доль, Ю. П. Гуляев

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследования динамики кровотока на сегодняшний день являются одним из важнейших направлений в медицине и механике. Это связано с необходимостью прогнозирования последствий оперативного вмешательства и профилактики сердечно-сосудистых заболеваний. Поэтому построение точной и подробной математической модели движения крови по сосудам – одна из главных задач биомеханики.

Основная система уравнений динамики кровотока имеет вид

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + r\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial S'}{\partial z} + \frac{S_0 - T_0}{R}\frac{\partial w}{\partial z} + \tau, \tag{4}$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p' + \frac{p_0}{R}w - \frac{T'}{R}, \tag{5}$$

$$S' = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{w}{R}\right), \tag{6}$$

$$T' = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{7}$$

где $\tau = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\mid_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\mid_{r=R}\right)$.

Обозначим $\frac{\partial p}{\partial z} = K'(z)e^{i\omega t}$, $p = K(z)e^{i\omega t}$.

Контактные условия будут иметь вид $v_z\mid_S = \frac{\partial u}{\partial t}, v_r\mid_S = \frac{\partial w}{\partial t}$.

Будем решать систему методом разделения переменных. Для этого представим неизвестные функции в виде:

$$v_z = v_{z0}(r,z)e^{i\omega t}, v_r = v_{r0}(r,z)e^{i\omega t}, u = u_{z0}(z)e^{i\omega t}, w = w_0(z)e^{i\omega t}.$$

Из уравнения (1) получим

$$\rho i\omega v_{zo} = -K(z) + \mu\left(v''_{z0} + \frac{1}{r}v'_{z0}\right), \tag{8}$$

$$v''_{z0} + \frac{1}{r}v'_{z0} - \frac{i\rho\omega}{\mu}v_{z0} = -\frac{1}{\mu}K(z). \tag{9}$$

Найдем общее решение однородного уравнения: $v''_{z0} + \frac{1}{r}v'_{z0} - \frac{i\rho\omega}{\mu}v_{z0} = 0$.

Обозначим $\lambda^2 = \frac{i^3\rho\omega}{\mu}$. Тогда $v''_{z0} + \frac{1}{r}v'_{z0} + \lambda^2 v_{z0} = 0$. Введем замену переменной: $r' = \lambda r$. Получим

$$v''_{z0} + \frac{1}{r}v'_{z0} + v_{z0} = 0, \tag{10}$$

Далее штрих у r для удобства опустим. (10) – уравнение Бесселя порядка 0. Решением его будет функция Бесселя вида $J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}$.

Тогда $v_{z0} = J_0(\lambda r)C(z)$, где $C(z)$ – произвольная функция переменной z. Таким образом, учитывая, что частным решением неоднородного уравнения (9) будет $-\frac{1}{\mu\lambda^2}K(z)$, получим

$$v_z(z, r, t) = \left(C(z)J_0(\lambda r) - \frac{1}{\mu\lambda^2}K(z)\right) e^{i\omega t}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение неразрывности (3) и интегрируя его, найдем $v_z(z, r, t)$:

$$v_z(z, r, t) = \frac{1}{r}\left(-\frac{C'(z)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\frac{\left(r^2\right)^{k+1}}{4^k(k+1)} + \frac{r^2}{2\mu\lambda^2}K'(z)\right) e^{i\omega t}. \qquad (12)$$

Получим решения для w и u. Из уравнений (4) и (6) получим:

$$-\omega^2\rho h u_{z0} = \frac{Eh}{1-\nu^2}u''_{z0} + \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)}w'_0 + \frac{S_0 - T_0}{R}w_0. \qquad (13)$$

Из уравнений (5) и (7) аналогично получаем

$$-\omega^2\rho h u_{z0} = K(z) + \frac{p_0}{R}w_0 - \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)}w'_0 - \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)}u'_{z0}. \qquad (14)$$

Для удобства дальнейшего решения системы (13)–(14) введем обозначения:

$$a = -\omega^2\rho h, b = a - \frac{p_0}{R} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)}, c = \frac{EH\nu}{R(1-\nu^2)},$$

$$d = \frac{Eh}{1-\nu^2}, g = \frac{S_0 - T_0}{R}.$$

Тогда получим систему четырех дифференциальных уравнений (13), (14), а также уравнения для $C(z)$ и $K(z)$, полученные из контактных условий. В этих уравнениях u_{z0} и w_0 зависят только от z, поэтому уравнения будут обыкновенными дифференциальными. В новых обозначениях:

$$bw_0 = K(z) - cu'_{z0},$$

$$au'_{z0} = du''_{z0} + cw'_0 + gw_0,$$

$$C(z)J_0(R\lambda) - \frac{1}{\mu\lambda^2}K(z) = i\omega u_{z0}, \qquad (15)$$

$$-\frac{C'(z)}{2}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\frac{(\lambda^2R)^{k+1}}{4^k(k+1)}+\frac{R}{2\mu\lambda^2}K'(z)=i\omega w_0.$$

Введем обозначения для простоты дальнейших вычислений:

$$A=J_0(\lambda R), B=\frac{1}{\mu\lambda^2}, G=i\omega, D=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\frac{(\lambda^2R)^{k+1}}{4^k(k+1)}, E=\frac{R}{2\mu\lambda^2}.$$

Ищем решение системы (15) в виде

$$K(z)=C_1e^{\lambda z}, u_{z0}(z)=C_2e^{\lambda z}, w_0(z)=C_3e^{\lambda z}, C(z)=C_4e^{\lambda z}.$$

Тогда получим систему уравнений относительно $C_i, i=1,..,4$:

$$\begin{gathered} bC_3=C_1-c\lambda C_2,\\ aC_2=d\lambda^2C_2+c\lambda C_3+gC_3,\\ AC_4-BC_1=GC_2,\\ D\lambda C_4+E\lambda C_1=GC_3. \end{gathered} \tag{16}$$

Характеристическое уравнение системы будет $A_0\lambda^3+B_0\lambda^2+C_0\lambda+D_0=0$, где $A_0=bBDd-Ac^2E+AbdE, B_0=-AGd-DcgG+cEg-DgcB, C_0= = bBDa-AabE-Dc^2gB-DGg, D_0=AGa.$

Корни кубического уравнения могут быть получены численно. Далее, поочередно подставляя полученные корни в систему (16), решаем ее относительно $C_i, i=1,..,4$. Тогда общее решение системы (15) будет иметь вид

$$\begin{gathered} K(z)=\alpha_{11}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{21}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{31}A_3e^{\lambda_3 z},\\ u_{z0}(z)=\alpha_{12}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{22}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{32}A_3e^{\lambda_3 z},\\ w_0(z)=\alpha_{13}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{23}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{33}A_3e^{\lambda_3 z},\\ C(z)=\alpha_{14}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{24}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{34}A_3e^{\lambda_3 z},\\ u(z,r,t)=\left(\alpha_{12}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{22}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{32}A_3e^{\lambda_3 z}\right)e^{i\omega t},\\ w(z,r,t)=\left(\alpha_{13}A_1e^{\lambda_1 z}+\alpha_{23}A_2e^{\lambda_2 z}+\alpha_{33}A_3e^{\lambda_3 z}\right)e^{i\omega t}. \end{gathered}$$

Таким образом, все неизвестные функции зависят от трех произвольных констант интегрирования A_1, A_2, A_3. Предложенная математическая модель с достаточной степенью точности описывает гемодинамику крупных кровеносных сосудов, поэтому она может быть использована для решения конкретных задач биомеханики.