очевидных вычислений $\sup\limits_{0\le x\le 1}\tilde J(x) \ge \tilde J(x)|_{x=1}$. Получаем одинаковый по α_1 порядок.

Отсюда и следует утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. *Хромова Г. В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 75–78.
3. *Хромова Г. В.* Об одном способе нахождения приближенных решений операторных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 58–79.
4. *Хромова Г. В., Шаталина О. И.* Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для операторов тихоновской регуляризации // Математика. Механика : сб. науч. тр. 2011. Вып. 12. С. 11–112.
5. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2006. № 9(532). С. 71–78.

УДК 516.9

В. Р. Шебалдин

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФОНДОВООРУЖЕННОСТЬ

Рассмотрим модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются, при изменении цен технология не подвергается никаким изменением.

Пусть $K(t)$ – капитал предприятия, $L(t)$ – количество занятых (трудовые резервы). В качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия. Таким образом, имеем следующую модель [1]:

$$\dot K(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad K(0) = K_0, \tag{1}$$

$$\dot L(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], \qquad t \in [0, T], \tag{3}$$

$$J(K, L, u) = \int_0^T \{e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln F(K, L)]\}dt \to max, \tag{4}$$

где $\mu = \text{const}, \mu > 0$ – заданный коэффициент потери трудовых ресурсов; $\rho = \text{const}, \quad \rho > 0$ – коэффициент дисконтирования; $\varepsilon = \text{const}, \varepsilon > 0$ – заданный параметр, определяющий часть стоимости произведенного продукта, которую предприятие обязано потратить на развитие производства; функция производства $F(K, L)$ – дважды непрерывно дифференцируемая, положительная однородная функция своих аргументов; $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция.

В настоящей статье данная модель рассматривается на конечном интервале времени. Доказано [2], что при выполнении так называемых «неоклассических» условий данная задача имеет решение.

Отметим, что для предприятия также существенны такие показатели, как достижение определенного уровня капитала в заданные моменты времени, относительные показатели уровня риска для сбыта продукции и другие [3].

Здесь рассматриваются ограничения на фондовооруженность предприятия в фиксированные моменты времени (см. [3]), то есть

$$\frac{K(t_j)}{L(t_j)} \geq c_j, \qquad t_j \in [0, T], \qquad j = \overline{1, q}. \tag{5}$$

Доказано (см. [1]), что при замене $x(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ задача (1–3),(5) сводится к следующей:

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

$$u \in U_\varepsilon, \tag{7}$$

$$x(t_j) \geq c_j, \qquad j = \overline{1, q}, \tag{8}$$

$$J(x, u) = \int_0^T \{e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]\}dt \to max, \tag{9}$$

где $f(x) = F(x, 1)$.

В следующей теореме для данной задачи доказываются необходимые условия экстремума.

Теорема. *Пусть $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ – оптимальная пара задачи (6–9) . Тогда существуют дифференцируемые функции $\psi_j(t), j = \overline{0, q}$, удовлетворяющие следующим уравнениям:*

$$\max_{u(t)\in V_\varepsilon}\min_{j\in M_0}\int_0^T \Delta_u H_j(t)dt = 0,$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t)f(\hat{x}(t)) - \mu\hat{x}(t), \qquad \hat{x}(0) = x_0, \quad t\in[0,T],$$

$$\dot{\psi}_0(t) + \psi_0(\hat{u}(t)f(\hat{x}(t)) - \mu) + \frac{e^{-\rho t}}{f(\hat{x}(t))}f'(\hat{x}(t)) = 0, \quad \psi_0(T) = 0,$$

$$M_0 = M\cup\{0\}, \quad M = \{j \quad | \quad \hat{x}(t_j) = c_j \quad \}, \quad j = \overline{1,q},$$

$$\psi_j(t) = \begin{cases}\tilde{\psi}_j(t), & t\in[0,t_j],\\ 0, & t\in(t_j,T], \quad j=\overline{1,q},\end{cases}$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(t) = -\tilde{\psi}_j(t)(\hat{u}(t)f'(\hat{x}(t)) - \mu), \qquad \tilde{\psi}_j(t_j) = 1, \quad t\in[0,t_j],$$

$$\Delta_u H_j(t) = \psi_j(t)f(\hat{x}(t))(u(t) - \hat{u}(t)), \quad j = \overline{1,q},$$

$$\Delta_u H_0(t) = \psi_0[f_0(\hat{x}(t),u(t)) - f_0(\hat{x}(t),\hat{u}(t))],$$

где $f_0(x,u) = e^{-\rho t}(\ln(1-u) + \ln f(x))$, *а* V_ε *– множество кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению (7).*

Для доказательства данной теоремы производится редукция задачи (6–9) к вспомогательной линейной задаче оптимального управления с помощью замены $t(\tau) = \int_0^\tau v(s)ds, \quad v(s)\geq 0$, где $v(s)$ – управление во вспомогательной задаче оптимального управления [4]. Для полученной задачи доказываются необходимые условия экстремума аналогично доказательству, приведенному в [5]. С помощью обратной замены $\tau = \tau(t)$ было получено доказательство данной теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Aseev S. M., Kryazhimskii A. V.* The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Growth Problems /Steklov Institute of Math. Russian Academy of Science. Moscow. 2007. Vol. 2007. P. 253.

2. *Imada K.* On a Two-sector Model of Economic Growth. Comments and a Generalization. // Rev. econ. stud. 1963. Vol. 30, №2. P. 119–127.

3. *Ногин В. Д.* Введение в оптимальное управление. СПб. : ЮТАС, 2008. 92 с.

4. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1967. №5(3). С. 395–493.

5. *Шебалдин В. Р.* Об одной задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями. Саратов, 1995. 14 с. Деп. в ВИНИТИ, №3074–В95.