Отправляясь от этой леммы, мы повторяем схему доказательства теоремы о сходимости (3) в [1], заменяя всюду условие (2) условием (4), и приходим к теореме:

Теорема. *При* $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(t) \neq 0$ *для сходимости (3) необходимо и достаточно, чтобы* $u \in M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Приближение непрерывных функций с интегральными граничными условиями // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронежской зимней школы. Воронеж, 25 янв. – 4 февр. 2011 г. Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2011. С. 345.

УДК 517.518

Т. С. Чикина

ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА — РИССА В p-ВАРИАЦИОННОЙ МЕТРИКЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, $2\pi-$периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 2\pi\}$ – разбиение периода. Введем p-вариационную сумму $\varkappa_\xi^p(f) = (\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{1/p}$, и p-вариационные модули непрерывности [1]:

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f,\delta) = \sup_{|\xi|\leqslant\delta} \varkappa_\xi^p(f), \quad |\xi| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(f,\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \omega_{1-\frac{1}{p}}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant 2.$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+ih)$. Пространство C_p функций f, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega_{1-\frac{1}{p}}(f,\delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, 2\pi))$, где $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in R}|f(x)|$. Если $f(x)$ имеет ряд Фурье $a_0/2 + \sum_{i=1}^\infty (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$, то

$$Z_n^k(f)(x) = a_0/2 + \sum_{i=1}^{n} (1 - i^k/(n+1)^k)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

назовем *нормальными средними Зигмунда — Рисса порядка* k. Легко видеть, что для $t_n \in T_n$ и четного $k \in N$ мы имеем $|t_n - Z_n^k(t_n)| = (n+1)^{-k}|t_n^{(k)}|$, а при нечетном $k \in \mathbb{N}$ верно $|t_n - Z_n^k(t_n)| = (n+1)^{-k}|\widetilde{t_n^{(k)}}|$, где для $t_n = c_0/2 + \sum_{i=1}^{n}(c_i \cos ix + d_i \sin ix)$ сопряженный полином $\widetilde{t_n}$ будет равен $\sum_{i=1}^{n}(c_i \sin ix - d_i \cos ix)$. Пусть T_n – пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, $E_n(f)_{C_p} = \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{C_p}$.

Лемма 1 [2]. *Пусть* $1 < p < \infty$, $t_n \in T_n$. *Тогда справедливо неравенство* $\|t_n\|_{C_p} \leqslant C\, n^{1/p}\|t_n\|_{L^p}$.

Лемма 2. (см. [1]). 1) *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\omega_k(f,\delta)_{L_p} \leqslant C\, \delta^{\frac{1}{p}}\omega_{k-\frac{1}{p}}(f,\delta)$.

2) *Пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ *и* f – 2π*-периодическая функция такая, что* $f^{(r-1)}$ *абсолютно непрерывна, а* $f^{(r)} \in L^p[0,2\pi]$. *Тогда* $f \in C_p$ *и* $\omega_{r-\frac{1}{p}}(f,\delta) \leqslant \|f^{(r)}\|_p\, \delta^{r-\frac{1}{p}}$.

3) *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. *Тогда* $\omega_k(f,\delta) \in N^{k-1/p}$ *(т.е.* $\omega_{k-1/p}(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)^{k-1/p}\omega_{k-1/p}(f,\delta)$, $\lambda > 0$*).*

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in N$. *Тогда для* $f \in C_p$ *справедлива оценка*

$$\|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leqslant C\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n).$$

Доказательство. Разберем случай нечетного k. Пусть $t_n \in T_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{C_p} = E_n(f)_{C_p}$. Известно, что Z_n^k ограничен в пространстве C_p в силу своей сверточной природы. Имеем

$$\|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leqslant \|f - t_n\|_{C_p} + \|t_n - Z_n^k(t_n)\|_{C_p} + \|Z_n^k(t_n) - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \|Z_n^k\|_{C_p \to C_p})E_n(f)_{C_p} + C_1(n+1)^{-k}\|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p}) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 E_n(f)_{C_p} + C_1(n+1)^{-k}\|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p}).$$

Используя лемму 1, теорему М. Рисса о сопряженной функции в L^p, $1 < p < \infty$ [3, гл. 3, п. 3.11.1]), и неравенство С. М. Никольского — С. Б. Стечкина для тригонометрических полиномов [3, гл. 4, п. 4.8], находим, что

$$\|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p} \leqslant C_3 n^{1/p}\|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_p \leqslant C_4 n^{1/p}\|t_n^{(k)}\|_p \leqslant C_4 n^{1/p}\left(\frac{n}{2\sin\frac{1}{2}}\right)^k \omega_k(f, 1/n)_{L_p}.$$

По прямой теореме приближения в C_p (см. [1]) верно неравенство $E_n(f)_{C_p} \leqslant C_5\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n)$. Согласно лемме 2 и неравенству $\omega_{k-\frac{1}{p}}(t_n,\delta) \leqslant$

$\leqslant C_6\omega_{k-\frac{1}{p}}(f,\delta)$ [4] имеем

$$\|t_n - Z_n^k(t_n)\|_{C_p} \leqslant C_7(n+1)^{-k+\frac{1}{p}} n^k n^{-\frac{1}{p}} \omega_{k-\frac{1}{p}}(t_n, \frac{1}{n}) + C_8\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{n}) \leqslant C_9\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{n}).$$

Для четного k доказательство аналогично без применения теоремы М. Рисса.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, *тогда*

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) \leqslant C\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta),$$

где C *не зависит от* n, f, δ.

Доказательство. При $\delta \geqslant 1/n$ имеем в силу теоремы 1

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) \leqslant \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + \omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f) - f, \delta) \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + 2^{k-1}\|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leqslant \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + 2^{k-1}C_1\,\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 2^{k-1}C_1)\,\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta). \tag{1}$$

При $\delta < 1/n$ в силу леммы 2, неравенства С. М. Никольского — С. Б. Стечкина и неравенства (1) при $\delta = 1/n$ получаем

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) \leqslant \delta^{k-\frac{1}{p}}\|(Z_n^k)^{(k)}(f)\|_p \leqslant C_2\,\delta^{k-\frac{1}{p}} n^k \omega_k(Z_n^k(f), 1/n)_p \leqslant$$

$$\leqslant C_3(n\delta)^{k-\frac{1}{p}}\omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), 1/n) \leqslant C_4(n\delta)^{k-\frac{1}{p}}\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n) \leqslant C_5\,\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta). \tag{2}$$

Объединяя (1) и (2), доказываем теорему.

Замечание. *Теорема 2 является аналогом теоремы 1 из* [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

2. *Терехин А. П.* Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Математические заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 289–300.

3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960.

4. *Волосивец С. С.* Полиномы наилучшего приближения и соотношения между модулями непрерывности в пространствах функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1996. № 9. С. 21–26.