то имеют место соотношения

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_0(x) + o(1) \text{ \textit{при} } \nu\to\infty,$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_1(x) + o(1) \text{ \textit{при} } \nu\to\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. : сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

УДК 519.83

Т. Ф. Савина

О ПОЛНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГОМОМОРФИЗМОВ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Для игр с отношениями предпочтения вида $G = \langle (X_i)_{i\in N},\ A,\ (\rho_i)_{i\in N},\ F\rangle$ как для алгебраических систем [1] естественным образом введено понятие гомоморфизма [2]. Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [3] на базе условий ковариантности и контравариантности гомоморфизмов. В настоящей статье дано точное описание множества оптимальных решений [4] игры на основе полноты семейства гомоморфизмов.

Оптимальными решениями в игре являются ситуации равновесия и допустимые (вполне допустимые) исходы. Введем соответствующие определения.

Определение 1. Ситуация $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i\in N} \in X$ в игре G называется

- *ситуацией общего равновесия*, если для каждого $i \in N$ и любых $x_i \in X_i$ выполнено условие $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\not>} F(x^0)$;
- *ситуацией равновесия по Нэшу*, если выполняется $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\lesssim} F(x^0)$.

Определение 2. Исход a называется

• *допустимым в игре* G, если для каждого игрока $i \in N$ выполнено $\neg\left(\exists x_i \in X_i\right)\left(\forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}\right) F\left(x_i, x_{N\backslash i}\right) \overset{\rho_i}{>} a$,

• *вполне допустимым в игре* G, если для каждого игрока $i \in N$ выполнено $\left(\exists x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}\right)\left(\forall x_i \in X_i\right) F\left(x_i, x_{N\backslash i}\right) \overset{\rho_i}{\not>} a$.

Пусть K и $\mathscr{K}$ – два класса игр с отношениями предпочтения множества игроков $N = \{1, \ldots, n\}$. Зафиксируем в этих классах некоторые принципы оптимальности; будем обозначать через $Opt\, G$ множество оптимальных решений игры $G = \langle (X_i)_{i\in N}\, , A, (\rho_i)_{i\in N}\, , F\rangle \in$ K, через $Opt\, \Gamma$ – множество оптимальных решений игры $\Gamma = \langle (Y_i)_{i\in N}\, , B, (\sigma_i)_{i\in N}\, , \Phi\rangle \in \mathscr{K}$.

Определение 3. Набор отображений $\boldsymbol{f} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$, где $\varphi_i \colon X_i \to Y_i$ $(i \in N)$ и $\psi \colon A \to B$ называется *гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если для любого индекса $i \in N$, любых элементов $a_1, a_2 \in A$ и любой ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняются следующие два условия:

$$Hom1: \quad \psi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)),$$
$$Hom2: \quad a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2).$$

Гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ игры G в игру Γ называется *строгим*, если для каждого $i \in N$ дополнительно выполняется условие

$$Str: \quad a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{<} \psi(a_2).$$

Определение 4. Зафиксируем некоторый класс H гомоморфизмов из игр класса K в игры класса $\mathscr{K}$. Гомоморфизмы класса H называются *ковариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in$ K и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\quad\boldsymbol{f}$ – образ оптимального решения игры G есть оптимальное решение в игре Γ, и *контравариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in$ K и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\quad\boldsymbol{f}$ – прообраз оптимального решения игры Γ есть оптимальное решение в игре G.

Определение 5. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ называется *ковариантно полным*, если для каждого оптимального решения $p \in Opt\, G$ существует такой индекс $j \in J$, что $\boldsymbol{f}_j(p) \in Opt\, \Gamma_j$.

Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ называется *контравариантно полным*, если условие «$\boldsymbol{f}_j(p) \in Opt\, \Gamma_j$ для всех $j \in J$» влечет $p \in Opt\, G$.

Лемма

1. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ *является ковариантно полным семейством контравариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:* $Opt\,G = \bigcup\limits_{j\in J} \boldsymbol{f}_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$.

2. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ *является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:* $Opt\,G = \bigcap\limits_{j\in J} \boldsymbol{f}_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$.

Пусть K – класс игр с упорядоченными исходами, $\mathscr{K}$ – класс игр с линейно упорядоченными исходами. В качестве оптимальных решений игры $G \in$ K возьмем множество ее ситуаций равновесия, в качестве оптимальных решений игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются контравариантными.

2. Для каждой игры $G \in$ K *семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса* $\mathscr{K}$ *является ковариантно полным.*

Схема доказательства. Зафиксируем две игры $G \in$ K, $\Gamma \in \mathscr{K}$ и некоторый гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ из игры G в игру Γ.

Доказательство утверждения 1 проводится методом от противного. Предполагая, что ситуация $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ не будет ситуацией общего равновесия в игре G, получаем противоречие с тем, что ситуация $\varphi(x^0) = \left(\varphi_1(x_1^0), \ldots, \varphi_n(x_n^0)\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

Доказательство утверждения 2 сводится к нахождению строгого гомоморфизма $\boldsymbol{f}$ из игры G в некоторую игру Γ с линейно упорядоченными исходами такого, что для каждой ситуации общего равновесия x^0 игры G ситуация $\varphi(x^0)$ будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ. Существование искомого строгого гомоморфизма основано на лемме 2 [5]. Ситуация x^0 будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\Gamma = \langle (X_i)_{i\in N}\,,\, A,\, (\overline{\rho}_i)_{i\in N}\,,\, F\rangle$ с линейно упорядоченными исходами. При этом набор тождественных отображений $(\Delta_{X_1}, \ldots, \Delta_{X_n}, \Delta_A)$ будет строгим гомоморфизмом из игры G в игру Γ.

Теорема 1 доказана.

Далее, для тех же классов игр рассмотрим следующие типы оптимальных решений. В качестве оптимальных решений игры $G \in$ K возьмем множество ее ситуаций равновесия по Нэшу, в качестве оптимальных решений игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива

Теорема 2

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются ковариантными.

2. Для каждой игры $G \in$ К семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса $\mathscr{K}$ является контравариантно полным.

Схема доказательства. Зафиксируем две игры $G \in$ К, $\Gamma \in \mathscr{K}$ и некоторый гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ из игры G в игру Γ.

1. Применяя последовательно свойства гомоморфизма $Hom2$, $Hom1$ к ситуации равновесия по Нэшу x^0 в игре G, получаем, что ситуация $\varphi(x^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

2. Доказательство проводится методом от противного с применением леммы 2 [5]. Рассмотрим игру $\langle (X_i)_{i \in N}, A, (\overline{\rho}_i)_{i \in N}, F \rangle = \overline{\Gamma}$, в которой для игрока i_0 отношение порядка есть $\overline{\rho}_{i_0}$, а для всех остальных игроков $j \neq i_0$ отношение $\overline{\rho}_j$ есть любое линейное доупорядочение порядка ρ_j. В игре $\overline{\Gamma}$ с линейно упорядоченными исходами ситуация x^0 не будет ситуацией равновесия по Нэшу, а система тождественных отображений $\varphi_i = \Delta_{X_i}$ $(i \in N)$; $\psi = \Delta_A$ является строгим гомоморфизмом из игры G в игру $\overline{\Gamma}$ с линейно упорядоченными исходами, что противоречит предположению о том, что ситуация $\varphi(x^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре с линейно упорядоченными исходами.

Теорема 2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.

2. *Савина Т. Ф.* Гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Дискретная математика и ее приложения: материалы X Международного семинара: Москва, 1–6 февраля 2010 г.. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 426–428.

3. *Савина Т. Ф.* Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 66–70.

4. *Савина Т. Ф.* Оптимальные решения в играх с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 2. С. 32—36.

5. *Розен В. В.* Редуцируемость оптимальных решений игр с упорядоченными исходами // Теория полугрупп и ее приложения. Вопросы аксиоматизации. 1988. С. 50–60.