$$\begin{cases} x = a^3u^7 + a^2mu^5v^2 - 5am^2u^3v^4 + 3m^3uv^6 \\ y = 3a^3u^6v - 5a^2mu^4v^3 + am^2u^2v^5 + m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases}; \tag{17}$$

$$\begin{cases} x = a^3u^7 - 3a^2mu^5v^2 + 3am^2u^3v^4 - m^3uv^6 \\ y = 7a^3u^6v - 3a^2mu^4v^3 + 3am^2u^2v^5 - m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases}. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что и ранее вывод формул 1-го комплекта проводится в духе рассуждений Л. Эйлера, относящихся к уравнению (2).

Пусть $A = \sqrt{a}$, $M = \sqrt{m}$ и пусть $n = 7$. Положим

$$Ax + My = (Au + Mv)^7, \quad Ax - My = (Au - Mv)^7.$$

Решив эту систему уравнений относительно x и y, получим для них формулы (15), формулу для z найдем, подставив найденные значения x и y в уравнение. Для вывода формул (16) полагаем

$$Ax + My = (Au + Mv)^6 \cdot (Au - Mv), \quad Ax - My = (Au - Mv)^6 \cdot (Au + Mv)$$

и действуем аналогично предыдущему случаю и т. д.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Эйлер Л.* Алгебра. СПб., 1768.
2. *Диксон Л.* Введение в теорию чисел. Тбилиси, 1941.

УДК 519. 83

В. В. Розен

НАХОЖДЕНИЕ КРАЙНИХ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПОДМАТРИЦ ЗАДАННОЙ МАТРИЦЫ

В работе [1] показано, что для игры двух игроков с упорядоченными исходами задача нахождения ситуаций равновесия в ее смешанном расширении сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы ее функции реализации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения сбалансированных подматриц для произвольной матрицы (все предварительные понятия содержатся в работах [1, 2]). Описание множества всех сбалансированных подматриц заданной матрицы, а также соответствующих им балансовых векторов может быть сведено в силу теоремы Крейна — Мильмана к нахождению крайних сбалансированных подматриц. Введем необходимые определения.

Пусть задана матрица $\|F(i,j)\|_{(i\in I, j\in J)}$ формата $m\times n$ над множеством A. Будем обозначать через S_k стандартный симплекс k-компонентных вероятностных векторов. С каждой парой $(x,y)\in S_m\times S_n$ ассоциируется вероятностная мера $\widetilde{F}_{(x,y)}$ на множестве A, определенная равенством

$$\widetilde{F}_{(x,y)}(a)=\sum_{F(i,j)=a} x_i\cdot y_j,\quad \text{где } x=(x_1,\dots,x_m),\ y=(y_1,\dots,y_n).$$

Как обычно, мы отождествляем индекс $i\in I$ с вероятностным вектором вида $(0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0)$. Зафиксируем пару подмножеств $I_0\subseteq I,\ J_0\subseteq$ $\subseteq J$. Определим подмножества $B^1_{J_0}\subseteq S_m$, $B^2_{I_0}\subseteq S_n$ равенствами

$$B^1_{J_0}=\left\{x\in S_n\colon\ (\forall j_1,j_2\in J_0)\,\widetilde{F}_{(x,\,j_1)}=\widetilde{F}_{(x,\,j_2)}\right\},$$

$$B^2_{I_0}=\left\{y\in S_m\colon\ (\forall i_1,i_2\in I_0)\,\widetilde{F}_{(i_1,\,y)}=\widetilde{F}_{(i_2,\,y)}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что $B^1_{J_0}$ и $B^2_{I_0}$ являются выпуклыми многогранниками, следовательно, $B^1_{J_0}\times B^2_{I_0}$ также является выпуклым многогранником в $S_m\times S_n$.

Определение. Подматрица $F(I_0\times J_0)=\|F(i,j)\|_{(i\in I_0, j\in J_0)}$ называется *крайней сбалансированной подматрицей,* если она сбалансирована и для нее существует такая пара балансовых векторов, которая является крайней точкой в выпуклом многограннике $B^1_{J_0}\times B^2_{I_0}$.

Для произвольного выпуклого многогранника P мы обозначаем через $Ext\ P$ множество его крайних точек.

Лемма. *Вектор $x^0\in B^1_{J_0}$ является крайней точкой в $B^1_{J_0}$ тогда и только тогда, когда он минимален по спектру, т.е. для любого $x\in B^1_{J_0}$ выполнено условие*

$$Sp\,x\subseteq Sp\,x^0\Longrightarrow x=x^0 \tag{1}$$

(мы обозначаем через $Sp\,x$ спектр вектора x : $Sp\,x=\{i\in I : x_i\neq 0\}$).

Доказательство. Пусть x^0 — крайняя точка в $B^1_{J_0}$. Рассмотрим вектор $x\in B^1_{J_0}$, удовлетворяющий условию $Spx\subseteq Spx^0$. Предположим, что $x\neq x^0$. Так как

$$\sum_{i\in Sp\,x} x_i=\sum_{i\in Sp\,x^0} x^0_i=1,$$

то среди ненулевых компонент вектора x существует такая $x_{i'}$, что $0 < x^0_{i'} < x_{i'}$, следовательно,

$$0 < \varepsilon = \min_{i \in Sp\, x} \frac{x^0_i}{x_i} < 1. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $|\varepsilon x_i| \leqslant x^0_i$ для всех $i \in Sp\, x$, поэтому $x^0_i \pm \varepsilon x_i \geqslant \geqslant 0$ $(i \in I)$, т.е. все компоненты обоих векторов $x^0 \pm \varepsilon x$ неотрицательны. Положим

$$x^1 = \frac{x^0 + \varepsilon x}{1 + \varepsilon},\ x^2 = \frac{x^0 - \varepsilon x}{1 - \varepsilon}.$$

Проверим, что $x^1, x^2 \in B^1_{J_0}$. Имеем

$$\sum_{i \in I} x^1_i = \sum_{i \in I} \frac{x^0_i + \varepsilon x_i}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i \in I} x^0_i + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1;$$

$$\sum_{i \in I} x^2_i = \sum_{i \in I} \frac{x^0_i - \varepsilon x_i}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i \in I} x^0_i - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1.$$

Ввиду $x^0, x \in B^1_{J_0}$ и используя линейность функции $\widetilde{F}_{(x,y)}$, получаем при любых $j_1, j_2 \in J_0$

$$\widetilde{F}_{(x^1, j_1)} = \widetilde{F}_{\left(\frac{x^0}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x, j_1\right)} = \frac{1}{1+\varepsilon} \widetilde{F}_{(x^0, j_1)} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \widetilde{F}_{(x, j_1)} =$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon} \widetilde{F}_{(x^0, j_2)} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \widetilde{F}_{(x, j_2)} = \widetilde{F}_{\left(\frac{1}{1+\varepsilon} x^0 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x, j_2\right)} = \widetilde{F}_{(x^1, j_2)}.$$

Мы показали равенство $\widetilde{F}_{(x^1, j_1)} = \widetilde{F}_{(x^1, j_2)}$; равенство $\widetilde{F}_{(x^2, j_1)} = \widetilde{F}_{(x^2, j_2)}$ устанавливается аналогично. Итак, $x^1, x^2 \in B^1_{J_0}$. Так как $\frac{1+\varepsilon}{2} x^1 + \frac{1-\varepsilon}{2} x^2 = = x^0$ и $\frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{2} = 1$, то из определения крайней точки следует, что $x^1 = x^2$. Тогда мы получаем

$$x^0 = \frac{1+\varepsilon}{2} x^1 + \frac{1-\varepsilon}{2} x^2 = \frac{1+\varepsilon}{2} x^1 + \frac{1-\varepsilon}{2} x^1 = x^1,$$

откуда $\frac{x^0 + \varepsilon x}{1+\varepsilon} = x^0$ и $x = x^0$. Последнее равенство находится в противоречии с нашим предположением, что и завершает доказательство необходимости.

Проверим достаточность. Предположим, что для вектора x^0 выполнено условие (1). Пусть $x^1 \in B^1_{J_0}$ и $x^2 \in B^1_{J_0}$ — два вектора такие что $x^0 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда $Sp\, x^1 \subseteq Sp\, x^0$,

$Sp\,x^2 \subseteq Sp\,x^0$, и в соответствии с (1) мы получаем $x^1 = x^0$ и $x^2 = x^0$, поэтому $x^1 = x^2$. Итак, x^0 является крайней точкой в $B^1_{J_0}$, что заканчивает доказательство леммы.

Используя лемму и теорему 2 из [2], имеем

Следствие. *Пусть M – крайняя сбалансированная подматрица матрицы $\|F\,(i,j)\|_{(i\in I, j\in J)}$. Тогда*

1. Подматрица M имеет единственный строчный балансовый вектор;

2. Подматрица M имеет единственный столбцовый балансовый вектор;

3. Подматрица M является квадратной;

4. $Det\,\chi\,(M^a) \neq 0$ для любого $a \in pr_2 M$, где $\chi\,(M^a)$ есть матрица с элементами m_{ij}, построенная по правилу:

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{если } F(i,j) = a, \\ m_{ij} = 0, & \text{если } F(i,j) \neq a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\left(x^0, y^0\right)$ – балансовая пара векторов для подматрицы $M = F\,(I_0 \times J_0)$ при условии $x^0 \in Ext\,B^1_{J_0}$ и $y^0 \in Ext\,B^2_{I_0}$. Рассмотрим строчный балансовый вектор x для $F\,(I_0 \times J_0)$: $x \in B^1_{J_0}$, $Sp\,x = I_0$. Так как $Sp\,x = Sp\,x^0$, то из леммы следует, что $x = x^0$. Таким образом, утверждение 1) проверено. Двойственно устанавливается утверждение 2). Утверждения 3) и 4) следуют из теоремы 2 работы [2].

Основной результат данной статьи составляет следующая

Теорема. *Пусть $\|F\,(i,j)\|_{(i\in I, j\in J)}$ – произвольная матрица над множеством A, $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$ и $M = F\,(I_0 \times J_0)$ ее подматрица. Подматрица M является крайней сбалансированной подматрицей тогда и только тогда, когда для любых $a, a_1, a_2 \in pr_2 M$ выполнены следующие условия:*

1) подматрица M является квадратной;

2) $Det\,\chi\,(M^a) \neq 0$;

3) все компоненты вектора $\lambda^a = (1, \ldots, 1)\,[\chi\,(M^a)]^{-1}$ положительны;

4) векторы λ^{a_1} и λ^{a_2} коллинеарны;

5) все компоненты вектора $\delta^a = [\chi\,(M^a)]^{-1}\,(1, \ldots, 1)^T$ положительны;

6) векторы δ^{a_1} и δ^{a_2} коллинеарны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розен В. В., Панкратова Ю. Н.* Ситуации равновесия и сбалансированные по-

крытия в играх с упорядоченными исходами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 105–108.

2. *Розен В. В.* Условия единственности балансовой пары векторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 105–108.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ квадратичный пучок обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y \tag{1}$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$

$$:= \big(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{2}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$.

Пусть ω_1, ω_2 — корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + {}+p_2 = 0$ и пусть выполняется основное предположение: *корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат.* Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \omega_1 < \omega_2$.

Обозначим далее $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. Очевидно, функции y_1, y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x,\lambda) = 0$. Для определенности далее считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda = {} = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1,2$. Пусть $a_{sk} = {} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_\nu(y_j,\lambda)\big)_{\nu,j=1}^2 = \lambda^2\big(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\big).$$

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то пучок (1),(2) является регулярным по Биркгофу [1, с. 66–67] и его функция Грина имеет оценку $O(\frac{1}{\lambda})$ вне кружков