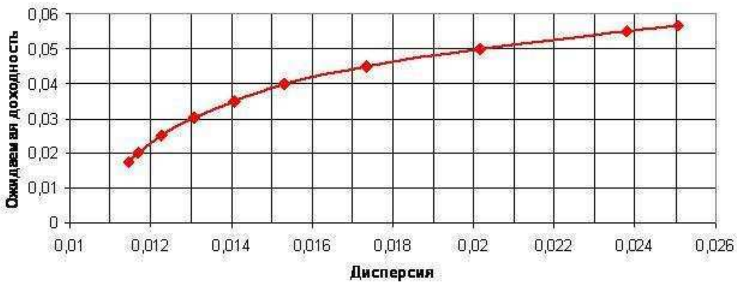

Работа показала, что существует возможность повышения результатов инвестирования путем объединения различных методик из разных областей знаний в одну комплексную систему. Использование описанной модели позволяет существенно повысить диверсификацию инвестиционного портфеля, включающего инструменты российского рынка ценных бумаг, значительно расширяя набор возможных портфелей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Markowitz H. M.* Portfolio selection//Journal of Finance. 1952. Vol. 7, №1. P. 77–91.

2. *Буренин А. Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов : учеб пособие. М. : 1 Федеральная книготорговая компания, 1998. С. 239–259.

3. URL : http//www.micex.ru (официальный сайт ММВБ) (дата обращения: 15.03.2011).

УДК 511

В. Н. Поляков

О НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

В данной статье дополняются и обобщаются результаты Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, касающиеся уравнений

$$ax^2 - my^2 = z^n \tag{1}$$

при $n \geq 3$.

Немного истории. Уравнение $ax^2 - my^2 = z^3$ (2) впервые рассмотрел Л. Эйлер, предложив следующий комплект формул для компонент x, y и z решений этого уравнения:

$$x = au^3 + 3muv^2, \quad y = 3au^2v + mv^3, \quad z = au^2 - mv^2 \tag{3}$$

(u и v – произвольные числа).

Однако уже сам Л. Эйлер заметил, что его формулы не могут дать полного решения уравнения (2).

Далее на рассматриваемые здесь уравнения обратил внимание Ж. Лагранж. Он видоизменил вывод формул Л. Эйлера для уравнения (2) и предложил метод своеобразного перехода от уравнения (1) с одним значением n к другому, при котором решение уравнения с $n = k$ используется для решения уравнения с $n = k+1$ и т. д. При этом оказывается, что метод Ж. Лагранжа дает только один комплект формул для x, y и z и кроме этого у него всегда действует предположение, что $a = 1$. Мы этим предположением пользуемся только для четных значений n, а уравнения рассматриваем независимо друг от друга.

Теорема 1. *Для уравнения (2), кроме формул Л. Эйлера, справедливы и следующие формулы для компонент его решений:*

$$\begin{cases} x = au^3 - muv^2 \\ y = 3au^2v - mv^3 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} . \tag{4}$$

Теорема 2. *Для отыскания решений уравнения $x^2 - my^2 = z^4$ пригодны следующие три комплекта формул:*

$$\begin{cases} x = u^4 + 6mu^2v^2 + m^2v^4 \\ y = 4u^3v + 4muv^3 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{5}$$

$$\begin{cases} x = u^4 - m^2v^4 \\ y = 2u^3v - 2muv^3 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{6}$$

$$\begin{cases} x = u^4 - 2mu^2v^2 + m^2v^4 \\ y = 0 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} . \tag{7}$$

Теорема 3. *Решения уравнения $ax^2 - my^2 = z^5$ можно вычислять по любому из трех комплектов формул для компонент:*

$$\begin{cases} x = a^2u^5 + 10amu^3v^2 + 5m^2uv^4 \\ y = 5a^2u^4v + 10amu^2v^3 + m^2v^5 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{8}$$

$$\begin{cases} x = a^2u^5 + 2amu^3v^2 - 3m^2uv^4 \\ y = 3a^2u^4v - 2amu^2v^3 - m^2v^5 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{9}$$

$$\begin{cases} x = a^2u^5 - 2amu^3v^2 + m^2uv^4 \\ y = a^2u^4v - 2amu^2v^3 + m^2v^5 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} . \tag{10}$$

Теорема 4. *Решения уравнения $x^2 - my^2 = z^6$ определяются по любому из четырех комплектов формул для его компонент:*

$$\begin{cases} x = u^6 + 15mu^4v^2 + 15m^2u^2v^4 + m^3v^6 \\ y = 6u^5v + 20mu^3v^3 + 6m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{11}$$

$$\begin{cases} x = u^6 + 5mu^4v^2 - 5m^2u^2v^4 - m^3v^6 \\ y = 4u^5v - 4m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{12}$$

$$\begin{cases} x = u^6 - mu^4v^2 - m^2u^2v^4 + m^3v^6 \\ y = 2u^5v - 4mu^3v^3 + 2m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{13}$$

$$\begin{cases} x = u^6 - 3mu^4v^2 + 3m^2u^2v^4 - m^3v^6 \\ y = 0 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} . \tag{14}$$

Теорема 5. *Решения уравнения $ax^2 - my^2 = z^7$ можно вычислять по формулам любого из четырех комплектов:*

$$\begin{cases} x = a^3u^7 + 21a^2mu^5v^2 + 35am^2u^3v^4 + 7m^3uv^6 \\ y = 7a^3u^6v + 35a^2mu^4v^3 + 21am^2u^2v^5 + m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{15}$$

$$\begin{cases} x = a^3u^7 + 9a^2mu^5v^2 - 5am^2u^3v^4 - 5m^3uv^6 \\ y = 5a^3u^6v + 5a^2mu^4v^3 - 9am^2u^2v^5 - m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \tag{16}$$

$$
\begin{cases}
x = a^3u^7 + a^2mu^5v^2 - 5am^2u^3v^4 + 3m^3uv^6 \\
y = 3a^3u^6v - 5a^2mu^4v^3 + am^2u^2v^5 + m^3v^7 \\
z = au^2 - mv^2
\end{cases}; \qquad (17)
$$

$$
\begin{cases}
x = a^3u^7 - 3a^2mu^5v^2 + 3am^2u^3v^4 - m^3uv^6 \\
y = 7a^3u^6v - 3a^2mu^4v^3 + 3am^2u^2v^5 - m^3v^7 \\
z = au^2 - mv^2
\end{cases}. \qquad (18)
$$

Доказательство. Заметим, что и ранее вывод формул 1-го комплекта проводится в духе рассуждений Л. Эйлера, относящихся к уравнению (2).

Пусть $A = \sqrt{a}$, $M = \sqrt{m}$ и пусть $n = 7$. Положим

$$
Ax + My = (Au + Mv)^7, \quad Ax - My = (Au - Mv)^7.
$$

Решив эту систему уравнений относительно x и y, получим для них формулы (15), формулу для z найдем, подставив найденные значения x и y в уравнение. Для вывода формул (16) полагаем

$$
Ax + My = (Au + Mv)^6 \cdot (Au - Mv), \quad Ax - My = (Au - Mv)^6 \cdot (Au + Mv)
$$

и действуем аналогично предыдущему случаю и т. д.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Эйлер Л.* Алгебра. СПб., 1768.
2. *Диксон Л.* Введение в теорию чисел. Тбилиси, 1941.

УДК 519. 83

В. В. Розен

НАХОЖДЕНИЕ КРАЙНИХ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПОДМАТРИЦ ЗАДАННОЙ МАТРИЦЫ

В работе [1] показано, что для игры двух игроков с упорядоченными исходами задача нахождения ситуаций равновесия в ее смешанном расширении сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы ее функции реализации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения сбалансированных подматриц для произвольной матрицы (все предварительные понятия содержатся в работах [1, 2]). Описание множества всех