4. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
5. *Новиков В. Е.* Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 68–70.

УДК 519.682.1

**А. А. Орел**

## О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ФАНТОМНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

В работе [1] предложено при конструировании фантомных типов данных использовать в качестве определяющего отношения отношение предпорядка, которому соответствует тип функциональной зависимости, представленный на языке Haskell конструктором типа (`->`). На основании рассмотренного отношения была решена задача статической проверки типов. Однако данное отношение не обладает свойством симметричности, что накладывает ограничения на область его применения. Фантомные типы данных, построенные на основе этого отношения, не позволяют, например, решить задачу динамической проверки типов [2]. Для решения такой задачи требуется реализация свойства рефлективности с помощью функции с сигнатурой `refl :: TE a b`, где `TE a b` - тип данных, соответствующий отношению эквивалентности, и реализация двух функций `from` и `to` с сигнатурами

`from :: TE a b -> a -> b` и `to :: TE a b -> b -> a`

Заметим, что при наличии свойства симметричности, реализуемого функцией `symm` с сигнатурой `symm :: TE a b -> TE b a`, достаточно иметь лишь одну из функций `from` или `to`, например `from`, так как `to` может быть получена как композиция `from . symm`.

Для определения базового типа `TE a b` можно воспользоваться отношением эквивалентности в виде `(A => B) & (B => A)`, реализуемым в силу изоморфизма Карри — Ховарда типом пары функциональных зависимостей `(a -> b, b -> a)` [3], или использовать на основе принципа Лейбница отношение эквивалентности в виде ∀ `f. f a -> f b` (см. [2]).

Рассмотрим другие возможности. В начале определим отношение эквивалентности с использованием альтернативы ( | ) в форме `(A | B) => (A & B)`. Соответствующий тип данных `TE a b` можно представить средствами языка Haskell в виде

```
type TE a b = Either a b -> (a, b)
```

Функции `refl`, `from` и `to` могут быть реализованы следующим образом:

```
refl :: TE a a
refl (Left x) = (x, x)
refl (Right x) = (x, x)

from :: TE a b -> a -> b
from f x = snd (f (Left x))

to :: TE a b -> b -> a
to f x = fst (f (Right x))
```

Поскольку отношение эквивалентности должно обладать свойствами симметричности и транзитивности, определим функции `symm` и `trans`, обеспечивающие эти свойства.

```
symm :: TE a b -> TE b a
symm f (Left x)  = case f (Right x) of
                     (y, z) -> (z, y)
symm f (Right x) = case f (Left x) of
                     (y, z) -> (z, y)

trans :: TE a b -> TE b c -> TE a c
trans f g (Left x)  =
  (x, snd (g (Left (snd (f (Left x))))))
trans f g (Right x) =
  (fst (f (Right (fst (g (Right x))))), x)
```

Следует заметить, что в определении функции `from` используется только второй (`snd`) элемент результирующей пары, а в определении функции `to` - только правый (`fst`). Принимая в расчет это замечание, попытаемся использовать для определения нового варианта типа данных `TE a b` отношение `(A | B) => (A | B)`, являющееся тавтологией. Соответствующий тип данных на языке Haskell будет иметь вид

```
type TE a b = Either a b -> Either a b
```

Функции `refl`, `symm`, `trans`, `from` и `to` в соответствии со сделанным замечанием могут быть реализованы следующим образом:

```
refl :: TE a a
refl (Left x) = Right x
refl (Right x) = Left x

symm :: TE a b -> TE b a
symm f (Left x)  = case f (Right x) of
```

```
                      Left y -> Right y
symm f (Right x) = case f (Left x) of
                      Right y -> Left y

trans :: TE a b -> TE b c -> TE a c
trans f g (Left x) = case f (Left x) of
                        Right y -> case g (Left y) of
                                     Right z -> Right z

trans f g (Right x) = case g (Right x) of
                         Left y -> case f (Right y) of
                                     Left z -> Left z

from :: TE a b -> a -> b
from f x = case f (Left x) of
             Right y -> y
             Left y -> undefined

to :: TE a b -> b -> a
to f x = case f (Right x) of
           Left y -> y
           Right y -> undefined
```

Поскольку определяющее отношение для `TE a b` является тавтологией, то в силу изоморфизма Карри — Ховарда существует функция `f` типа `TE a b`. Она определяется следующим образом:

```
f :: TE a b
f = id
```

Существование функции фантомного типа отличает полученный тип данных от типов, рассмотренных ранее. Отметим, что отношения, определяющие сигнатуры функций `from` и `to`, не являются тавтологиями. Вследствие этого обстоятельства функции `from` и `to` могут принимать значения `undefined`, однако это не ограничивает область их применения при решении задач, рассмотренных в работе [2].

Отметим, что в соответствии с [1, 2] определение функции `f` вида `f (C p1 ... pn) = e` при добавлении к конструктору данных `C` параметра `p` типа `TE a b`, контролирующего эквивалентность типов `a` и `b`, заменяется на `f (C p p1 ... pn) = from p e`.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Орел А. А.* Фантомные типы данных на основе отношения предпорядка // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 56–59.

2. *Hinze R.* Fun with phantom types. Cornerstones in Computing/ eds. J. Gibbons, O. de Moor. Palgrave Macmillan. The Fun of Programming. 2003. P. 245—262.

3. *Baars A.I., Swierstra S.* Typing dynamic typing// Proc of the Seventh ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP ’02), October 4–6, 2002. ACM Press / Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2002. SIGPLAN Notices 37(9).

УДК 519.25+519.853

**П. Ю. Пасеков**

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВИЦА К ПОРТФЕЛЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ТОРГОВЫХ СИСТЕМ

Эффективные методы формирования портфеля, состоящего из ценных бумаг, чрезвычайно важны как для институциональных, так и для частных инвесторов. В настоящей статье рассматривается модель, построенная на объединении понятий портфельного инвестирования, теории Г. Марковица и механических торговых систем.

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу [1], которая считается основой современной теории портфельного инвестирования. По теории Марковица для формирования набора эффективных портфелей необходимо определить ожидаемую доходность, дисперсию для каждого финансового актива и ковариацию между активами. Эффективный портфель – портфель, обеспечивающий самый низкий риск при заданной ожидаемой доходности. Рассмотрим постановку задачи Г. Марковица:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_i\theta_j Cov_{i,j} \to min \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} E(r_i)\theta_i = E(r) \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1, \end{cases}$$

где $\theta_i$ – доля $i$-го актива в портфеле, $Cov_{i,j}$ – ковариация $i$-го и $j$-го активов, $E(r)$ – ожидаемая доходность портфеля, $E(r_i)$ – ожидаемая доходность $i$-го актива.

Г. Марковиц ввел понятие «эффективная граница», на которой располагаются все эффективные портфели. Чтобы определить данную границу, необходимо рассчитать соответствующие удельные веса входящих