Рассуждая аналогично получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, если ребра A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 являются длинными, т.е. длина каждого из них больше половины диаметра, то справедливы оценки: $\left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^i \partial \mathbf{e}_{13}^k \partial \mathbf{e}_{14}^{n-i-k}}\right| \leq CM_4 d^{4-n}, 1 \leq n \leq 3,\ 0 \leq i, k \leq n\ (i+k \leq n)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zenisek A., Hoderova-Zlamalova J.* Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // Appl. of Math. 2001. Vol. 46., № 4. P. 295–315.

2. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.

3.*Байдакова Н. В.* О некоторых интерполяционных многочленах третьей степени на трехмерном симплексе // Труды Института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 43–57.

4. *Мелешкина А. В.* Об аппроксимации производными интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50, № 2. С. 211–220.

УДК 519.713.2, 512.534

В. А. Молчанов

КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В статье изучаются универсальные планарные автоматы, подавтоматы которых охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов.

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида $\Pi = (X, L)$, где X – непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l', что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

По определению планарные автоматы являются структурированными автоматами [2] $\mathbf{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ с множеством состояний Q и множеством выходных сигналов B, наделенными структурами плоскостей $\Pi_Q = (Q, L_Q)$ и $\Pi_B =$

$= (B, L_B)$, множеством входных сигналов A, функцией переходов $\delta : A \times Q \to Q$ и выходной функцией $\lambda : A \times Q \to B$, для которых при каждом фиксированном $a \in A$ преобразование $\delta_a(q) = \delta(a, q)$ $(q \in Q)$ является эндоморфизмом плоскости Π_Q и отображение $\lambda_a(q) = \lambda(a, q)$ $(q \in Q)$ – гомоморфизмом Π_Q в Π_B. Для автомата $\mathbf{A}$ без равнодействующих входных сигналов каждый входной сигнал a можно отождествить с парой отображений (δ_a, λ_a).

Для любых плоскостей Π_Q и Π_B автомат $\mathbf{A} = (\Pi_Q, A, \Pi_B, \delta, \lambda)$ с множеством входных сигналов A, состоящим из всех пар $a = (\varphi, \psi)$ эндоморфизмов φ плоскости Π_Q и гомоморфизмов ψ плоскости Π_Q в плоскость Π_B, функцией переходов $\delta(q, a) = \varphi(q)$ и выходной функцией $\lambda(q, a) = \psi(q)$ (здесь $q \in Q$) является планарным автоматом. Такие автоматы называются *универсальными планарными автоматами*, так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов. Основной результат работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

Для универсальных планарных автоматов исследована проблема конкретной характеризации, которая формулируется следующим образом: при каких условиях автомат $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ является универсальным планарным автоматом, т.е. на множестве состояний Q можно так определить структуру плоскости $\Pi_Q = (Q, L_Q)$ и на множестве выходных сигналов B – структуру плоскости $\Pi_B = (B, L_B)$, что множество входных сигналов A совпадет с множеством $\mathrm{End}\Pi_Q \times \mathrm{Hom}(\Pi_Q, \Pi_B)$.

Такая задача имеет прямое отношение к известной проблеме С. Улама [4] об определении математической структуры по данному множеству эндоморфизмов, которая не решена до сих пор ни для графов, ни для гиперграфов общего вида.

Для произвольного автомата $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ определим канонические тернарные отношения $R_Q \subset Q^3$ и $R_B \subset B^3$ по формулам:

$$R_Q = \{(q_1, q_2, q_3) \in Q^3 : \ (\forall (x_1, x_2, x_3) \in Q^3 \setminus \Delta)(\exists a \in A)\delta_a(x_i) = q_i\},$$

$$R_B = \{(b_1, b_2, b_3) \in B^3 : \ (\forall (x_1, x_2, x_3) \in Q^3 \setminus \Delta)(\exists a \in A)\lambda_a(x_i) = b_i\},$$

где $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in Q^3 : \ x_i = x_j \quad \text{для некоторых} \quad 1 \le i \ne j \le 3\}$.

Тернарное отношение $R \subset X^3$ называется *3-эквивалентностью на множестве* X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) $R \ne X^3$,

(ii) $(x, x, x) \in R$ для любого $x \in X$;

(iii) $(x_1, x_2, x_3) \in R \Longrightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in R$ для любых $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 3$;

(iv) $(x, y, z), (z, y, v) \in R \Longrightarrow (x, y, v) \in R$ для любых элементов $x, y, z, v \in X$, удовлетворяющих условию $y \neq z$.

При этом 3-эквивалентность R называется *квазиуниверсальной*, если для любых элементов $x, y \in X$ найдется такой отличный от них элемент $z \in X$, что $(x, y, z) \in R$.

Основная теорема. *Пусть $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ – произвольный автомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда $\mathcal{A}$ в том и только том случае является универсальным планарным автоматом* $\mathrm{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$ *для некоторых плоскостей* $\Pi_Q = (Q, L_Q)$, $\Pi_B = (B, L_B)$, *если канонические отношения R_Q, R_B этого автомата являются квазиуниверсальными 3-эквивалентностями на множествах Q и B соответственно, а также выполняются следующие свойства:*

1) если $(q_1, q_2, q_3) \in Q^3 \setminus R_Q$, то для любых $x_1, x_2, x_3 \in Q$, $y_1, y_2, y_3 \in$ $\in B$ найдется такой элемент $a \in A$, что $\delta_a(q_i) = x_i$ и $\lambda_a(q_i) = y_i$ для всех $1 \leq i \leq 3$;

2) если для отображений $\varphi : Q \to Q$, $\psi : Q \to B$ при любых значениях $q_1, q_2, q_3 \in Q$ существует $x \in A$, для которого $\delta_x(q_i) = \varphi(q_i)$ и $\lambda_x(q_i) = \psi(q_i)$ для всех $1 \leq i \leq 3$, то найдется такой элемент $a \in A$, что $\delta_a(q) = \varphi(q)$ и $\lambda_a(q) = \psi(q)$ для всех $q \in Q$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980.
2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.
3. *Molchanov V. A.* On definability of universal planar automaton by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
4. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964.

УДК 513.6

С. И. Небалуев

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КАРТАНА — ЛЕРЕ ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Основным результатом статьи является теорема о спектральной последовательности Картана — Лере для толерантных пространств.

Пусть π – произвольная группа. Рассмотрим [1, 2] толерантное пространство (Т пространство) (K, ξ), где $K = \pi \times \mathbb{N}$,

$$(g_1, a_1)\xi(g_2, a_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} g_1 = g_2, a_1 = a_2; \\ a_1 \neq a_2. \end{cases}$$