УДК 517.51

Ю. В. Матвеева

О КУБИЧЕСКОМ МНОГОЧЛЕНЕ НА ЧЕТЫРЕХГРАННИКЕ

На трехмерном симплексе строится Эрмитов сплайн третьей степени, для которого получены оценки отклонения производных до третьего порядка включительно по направлениям в терминах, не содержащих углов.

Пусть $\overline{T} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ – трехмерный замкнутый симплекс и $d(T)$ – его диаметр. Функция $f(\mathbf{x})$ определена на $\overline{T}$ и имеет непрерывные производные четвертого порядка по любым направлениям в $\overline{T}$. Пусть далее $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j,$ – единичные векторы.

Будем строить полином $Q(\mathbf{x})$ с действительными коэффициентами степени три, который в вершинах $A_i (i = \overline{1,4})$ симплекса $\overline{T}$ интерполирует функцию $f(\mathbf{x})$ вместе с ее производными по направлениям ребер, то есть

$$f(A_i) = Q(A_i), i = \overline{1,4}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, i = \overline{1,4}, i \neq j. \tag{2}$$

Такой полином имеет 20 коэффициентов. Условия (1) и (2) определяют 16 из них. Остается вопрос о выборе оставшихся четырех коэффициентов. В зависимости от их выбора можно будет говорить о степени приближения функции $f(\mathbf{x})$ полиномом $Q(\mathbf{x})$.

Вопросы о возможности построения интерполяционного многочлена произвольной степени на m-симплексе, обеспечивающего высокую гладкость кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области, и в то же время позволяющего минимизировать ограничения на триангуляцию, а также о выборе универсальной геометрической характеристики симплекса, через которую могли бы выписываться оценки погрешности для таких способов интерполяции, остаются на данный момент открытыми. В работах [1 – 3] рассматривается интерполяция многочленами 3-й степени на трехмерном и m-мерном симплексах.

В [1] предлагаются условия интерполяции функции трех переменных и устанавливаются соответствующие им оценки аппроксимации первых производных через довольно сложные, но, по мнению автора данной статьи, дающие хорошую точность оценок характеристики. Найденные интерполяционные условия позволяют ослабить требования на симплексы, но не всегда обеспечивают непрерывность результирующей кусочно-полиномиальной функции, а их корректировка с целью добиться непрерывности иногда приводит к необходимости усиления ограничений на триангуляцию. В данной статье предлагается несколько иной способ построения сплайна и получены оценки в терминах длин ребер симплекса.

Обозначим середины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 четырехгранника $\overline{T}$ соответственно P_{12}, P_{13}, P_{23}; $\mathbf{n}_{ij}^{(k)}$ – вектор нормали, восстановленный к середине ребра A_iA_j в грани $A_iA_jA_k$. Выберем дополнительные условия следующим образом:

$$\frac{\partial(Q-f)}{\partial\mathbf{n}_{12}^{(3)}}(P_{12})=0,\ \frac{\partial(Q-f)}{\partial\mathbf{n}_{12}^{(4)}}(P_{12})=0,$$

$$\frac{\partial(Q-f)}{\partial\mathbf{n}_{13}^{(4)}}(P_{13})=0,\ \frac{\partial(Q-f)}{\partial\mathbf{n}_{23}^{(4)}}(P_{23})=0. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет на $\overline{T}$ непрерывные частные производные четвертого порядка $\frac{\partial^4 f}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2\partial\mathbf{e}_3\partial\mathbf{e}_4}$ по любому направлению $\mathbf{e}_i$ $(i=\overline{1,4})$, d – диаметр $\overline{T}$, $M_4=\max\limits_{0\le i_j\le 4,\sum i_j=4}\max\limits_{x\in\overline{T}}\left|\frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_1^{i_1}\partial\mathbf{e}_2^{i_2}\partial\mathbf{e}_3^{i_3}\partial\mathbf{e}_4^{i_4}}\right|$, и пусть многочлен $Q(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3). Тогда справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}\partial\mathbf{e}_{14}}\right|\le\frac{CM_4d^4}{|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot|A_1A_4|};$$

$$\left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^2\partial\mathbf{e}_{1j}^k}\right|\le CM_4d^{4-n}, n=2,3,\ k\ge 0\ (k+2=n),\ j=2,3,4;$$

$$\left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{1i}^k\partial\mathbf{e}_{1j}^l}\right|\le\frac{CM_4d^4}{|A_1A_i|^k\cdot|A_1A_j|^l}, n=1,2,\ 0\le k,l\le n\ (k+l=n),$$
$$i,j=2,3,4;$$

$$\left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^i\partial\mathbf{e}_{13}^j\partial\mathbf{e}_{14}^k}\right|\le CM_4d^{4-n}\text{в остальных случаях.}$$

Доказательство. Интерполяционный многочлен для функции $f(\mathbf{x})$ с условиями (1), (2) имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{4} f(A_i)x_i^3 + 3\sum_{i\neq j,\ i,j\geq 0} f(A_i)x_i^2x_j +$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq 4} |A_iA_j|\cdot\left(\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}}x_j\right)x_ix_j +$$

$$+6a_{1110}x_1x_2x_3 + 6a_{1101}x_1x_2x_4 + 6a_{1011}x_1x_3x_4 + 6a_{0111}x_2x_3x_4.$$

Будем считать, что точка $\mathbf{x}\in\overline{T}$ задана своими барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3, x_4), тогда производные по направлениям можно вычислить по следующему правилу [2]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_iA_j|}\cdot\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right), i,j = 1,2,3,4,\ i\neq j. \tag{4}$$

Для краткости будем обозначать $f_i = f(A_i), i = \overline{1,3}$; $\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{e}_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{kj}}$, $k\neq j; k,j=\overline{1,4}$. Оценки отклонения производных третьего порядка по каждому из направлений $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}$ были получены в [2]. Рассмотрим смешанные производные третьего порядка по направлениям $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}$. Оценим $\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{14}^2\partial\mathbf{e}_{13}}\right|$. Остальные производные получаются аналогично.

Так как

$$|A_iA_j|\cdot\mathbf{e}_{ij} = |A_iA_k|\cdot\mathbf{e}_{ik} + |A_kA_j|\cdot\mathbf{e}_{kj},\ i,j,k=\overline{1,4},$$

то

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{|A_iA_k|}{|A_iA_j|}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ik}} + \frac{|A_kA_j|}{|A_iA_j|}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{kj}}. \tag{5}$$

Применяя (4)и (5) в выражении $\frac{\partial^3 Q}{\partial\mathbf{e}_{14}^2\partial\mathbf{e}_{13}}$, находя из третьего равенства условия (3) коэффициент $6a_{1011}$:

$$6a_{1011} = 6f_1 + 2|A_1A_3|\frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{e}_{13}} - |A_1A_4|\frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{e}_{14}} - |A_1A_4|\frac{\partial f_3}{\partial\mathbf{e}_{14}} + 4|A_1A_4|\frac{\partial f(P_{13})}{\partial\mathbf{e}_{14}} +$$

$$+\frac{|A_1A_4|}{|A_1A_3|}(\mathbf{e}_{14},\mathbf{e}_{13})\left[6(f_3-f_1) + |A_1A_3|\left(\frac{\partial f_3}{\partial\mathbf{e}_{31}} - \frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{e}_{13}}\right) - 4|A_1A_3|\frac{\partial f(P_{13})}{\partial\mathbf{e}_{13}}\right],$$

получаем

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_{14}^2\partial\mathbf{e}_{13}} = \frac{2}{|A_1A_3|\cdot|A_1A_4|^2}\cdot\left(6(f_1 - a_{1011}) + |A_1A_3|\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{e}_{13}} +\right.$$

$$+|A_1A_3|\cdot\frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}}+2\cdot|A_1A_4|\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}}\Big)=$$

$$=\frac{2}{|A_1A_4|^2|A_1A_3|}\cdot\Big(\frac{|A_1A_4|}{|A_1A_3|}(\mathbf{e}_{13},\mathbf{e}_{14})\Big[6(f_3-f_1)+|A_1A_3|\Big(\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}}-\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}\Big)-$$

$$-4|A_1A_3|\frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{13}}\Big]-4|A_1A_4|\frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{14}}+|A_1A_4|\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}}+3|A_1A_4|\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}}-$$

$$-|A_1A_3|\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}+|A_1A_3|\frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}}+|A_1A_4|\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{14}}\Big).$$

Обозначим через R выражение, стоящее в квадратных скобках.

Представим $\frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{14}}, \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}}, \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{14}}, \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{13}}, f_3, \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки A_1, тогда

$$|R|\le\frac{1}{2}M_4|A_1A_3|^4,$$

$$\Big|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{14}^2\partial \mathbf{e}_{13}}\Big|=\Big|\frac{\partial^3 Q}{\partial \mathbf{e}_{14}^2\partial \mathbf{e}_{13}}-\frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{e}_{14}^2\partial \mathbf{e}_{13}}+$$

$$+\frac{1}{3}|A_1A_4|\frac{\partial^4 f(\alpha)}{\partial \mathbf{e}_{14}^3\partial \mathbf{e}_{13}}-\frac{1}{12}\frac{|A_1A_3|^2}{|A_1A_4|}\frac{\partial^4 f(\beta)}{\partial \mathbf{e}_{13}^3\partial \mathbf{e}_{14}}+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{|A_1A_3|^2}{|A_1A_4|}\frac{\partial^4 f(\gamma)}{\partial \mathbf{e}_{13}^3\partial \mathbf{e}_{14}}-\frac{1}{|A_1A_3|^2|A_1A_4|}(\mathbf{e}_{13},\mathbf{e}_{14})R\Big|\le CM_4\frac{d^2}{|A_1A_4|},$$

где α и β,γ – точки, лежащие на ребрах $\mathbf{e}_{14}$ и $\mathbf{e}_{13}$ соответственно. Для получения оценок отклонения производных второго, первого и нулевого порядков по направлениям $\mathbf{e}_{12},\mathbf{e}_{13},\mathbf{e}_{14}$ будем рассуждать так. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_B^{\mathbf{x}}\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}\partial \mathbf{e}_{14}}d\mathbf{e}_{14}=\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{x})-\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{B}),$$

где $\mathbf{B}$ – точка, являющаяся проекцией точки $\mathbf{x}$ на боковую грань $A_1A_2A_3$. Оценка выражения, стоящего под знаком интеграла, известна. Таким образом, нам осталось получить оценку для второго слагаемого в правой части равенства. Но она уже была найдена ранее [4]: $\left|\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}}(B)\right|\le$ $\le CM_4d^2$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}}\right|\le CM_4\frac{d^4}{|A_1A_3||A_1A_2|}.$$

Рассуждая аналогично получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, если ребра A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 являются длинными, т.е. длина каждого из них больше половины диаметра, то справедливы оценки: $\left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^i\partial\mathbf{e}_{13}^k\partial\mathbf{e}_{14}^{n-i-k}}\right| \leq CM_4d^{4-n}, 1 \leq n \leq 3,\ 0 \leq i,k \leq n\ (i+k \leq n)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zenisek A., Hoderova-Zlamalova J.* Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // Appl. of Math. 2001. Vol. 46., № 4. P. 295–315.

2. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.

3.*Байдакова Н. В.* О некоторых интерполяционных многочленах третьей степени на трехмерном симплексе // Труды Института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 43–57.

4. *Мелешкина А. В.* Об аппроксимации производными интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50, № 2. С. 211–220.

УДК 519.713.2, 512.534

В. А. Молчанов

КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В статье изучаются универсальные планарные автоматы, подавтоматы которых охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов.

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида $\Pi = (X, L)$, где X – непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l', что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

По определению планарные автоматы являются структурированными автоматами [2] $\mathbf{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$ с множеством состояний Q и множеством выходных сигналов B, наделенными структурами плоскостей $\Pi_Q = (Q, L_Q)$ и $\Pi_B =$