УДК 518.9

И. А. Кузнецова

ОБ ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ ТРЁХ ЛИЦ

Данная статья относится к теории иерархических игр трёх лиц [1 – 4]. Постановка задачи близка к рассмотренной в [4], когда «хозяин» управляет «подчинённым» через «директора». Отличие от [4] состоит в том, что доход «директора» в данном случае явно зависит не только от действий «хозяина», но и от его собственной стратегии. Поэтому для достижения оптимального результата стратегии-функции «хозяина» должны зависеть не только от стратегий-функций «директора», но и от его конкретного выбора.

Рассмотрим игру $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$, где X, Y, Z – множества стратегий игроков, F, G, H – их функции выигрыша, причём F отображает $X \times Z$ в $\mathbb{R}$, G — $X \times Y$ в $\mathbb{R}$, H — $Y \times Z$ в $\mathbb{R}$. Обмен информацией между игроками в данной игре организован следующим образом. Первый игрок («хозяин») первым выбирает свою стратегию-функцию и сообщает её второму игроку («директору»), затем второй игрок выбирает свою стратегию-функцию и сообщает её третьему игроку («подчинённому»), после чего делает свой выбор третий игрок. Для упрощения изложения считаем, что множества стратегий игроков конечны.

Информационное расширение игры Γ, соответствующее данному способу обмена информацией, задаётся следующим образом. Положим

$$\overline{\Gamma} = (\Psi_1, \Phi_2, Z, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}),$$

где $\Psi_1 = \{\psi_1\}$, $\psi_1 : \Phi_2 \times Y \to X$, $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$, $\varphi_2 : Z \to Y$. При всех ψ_1, φ_2, z справедливы равенства

$$\overline{F}(\psi_1, \varphi_2, z) = F(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), z),$$

$$\overline{G}(\psi_1, \varphi_2, z) = G(\psi_1(\varphi_2(z), z), \varphi_2(z)),$$

$$\overline{H}(\psi_1, \varphi_2, z) = H(\varphi_2(z), z).$$

Поскольку каждый игрок стремится максимизировать свою функцию выигрыша, то наибольший гарантированный результат первого игрока в игре $\overline{\Gamma}$ определяется равенством

$$\gamma(\overline{\Gamma}) = \max_{\psi_1 \in \Psi_1} \min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1)} \min_{z \in M_3(\varphi_2)} F(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), z),$$

где

$$M_2(\psi_1) = \Big\{\varphi_2' : \forall\, z\;\; G(\psi_1(\varphi_2', \varphi_2'(z)), \varphi_2'(z)) = \max_{\varphi_2} G(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), \varphi_2(z))\Big\},$$

$$M_3(\varphi_2) = \Big\{z' : H(\varphi_2(z'), z') = \max_{z} H(\varphi_2(z), z)\Big\}.$$

Основной результат статьи состоит в сведении данной вариационной задачи с ограничениями к экстремальным задачам на исходных множествах X, Y, Z и нахождению оптимальной стратегии первого игрока.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\gamma(\overline{\Gamma}) = \max(K_{13}, M_{13}, L_1),$$

где $K_{13} = \max\limits_{(x,z)\in D_{13}} F(x,z)$, $D_{13} = \{(x,z) : \exists\ y\;\; G(x,y) > L_2,\; H(y,z) > L_3\}$, $L_2 = \max\limits_{y}\min\limits_{x} G(x,y)$, $L_3 = \max\limits_{z}\min\limits_{y} H(y,z)$, $M_{13} = \max\limits_{x\in E_1}\min\limits_{z\in E_3} F(x,z)$, $E_1 = \{x : \exists\ y\;\; G(x,y) > L_2\}$, $E_3 = \{z' : \min\limits_{y} H(y,z') = L_3\}$, $L_1 = \max\limits_{x}\min\limits_{z} F(x,z)$ *(максимум по пустому множеству будем считать равным* $-\infty$*).*

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Выполняется равенство $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = K_{13}$. Покажем, что результат K_{13} гарантирован первому игроку.

Пусть $K_{13} = \max\limits_{(x,z)\in D_{13}} F(x,z) = F(x_0, z_0)$. Из определения D_{13} существует $y = y_0$, для которого справедливы неравенства $G(x_0, y_0) > L_2$, $H(y_0, z_0) > L_3$.

Определим отображение $\varphi_2^0 : Z \to Y$ из условия

$$\forall\ z \in Z \quad \varphi_2^0(z) = \begin{cases} y_0, & z = z_0,\\ \varphi_2^-(z), & z \neq z_0,\end{cases}$$

где φ_2^- — «стратегия наказания», удовлетворяющая соотношению

$$\forall\ z \in Z \quad H(\varphi_2^-(z), z) = \min_{y} H(y,z).$$

Определим отображение $\psi_1^0 : \Phi_2 \times Y \to X$ равенством

$$\forall\ \varphi_2,\ y \quad \psi_1^0(\varphi_2, y) = \begin{cases} x_0, & \varphi_2 = \varphi_2^0,\\ \varphi_1^-(y), & \varphi_2 \neq \varphi_2^0,\end{cases}$$

где φ_1^- — «стратегия наказания», определяемая условием

$$\forall\ y \in Y \quad G(\varphi_1^-(y), y) = \min_x G(x, y).$$

Очевидны равенства $M_3(\varphi_2^0) = \{z_0\}$, $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$, и следовательно, справедливо соотношение

$$\min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2, \varphi_2(z)), z) = F(\psi_1^0(\varphi_2^0, \varphi_2^0(z_0)), z_0) =$$

$$= F(x_0, z_0) = K_{13}$$

и верно неравенство $\gamma(\overline{\Gamma}) \geq K_{13}$.

2. Справедливо равенство $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = M_{13}$.

Определим $x_0 \in E_1$ из условия

$$\min_{z \in E_3} F(x_0, z) = \max_{x \in E_1} \min_{z \in E_3} F(x, z) = M_{13}$$

и выберем $y_0 \in Y$, удовлетворяющий неравенству $G(x_0, y_0) > L_2$.

Определим отображение $\varphi_2^0 : Z \to Y$ равенством

$$\forall\ z \in Z \quad \varphi_2^0(z) = \begin{cases} y_0, & z \in E_3, \\ \varphi_2^-(z), & z \notin E_3 \end{cases}$$

и отображение $\psi_1^0 : \Phi_2 \times Y \to X$ — соотношением

$$\forall\ \varphi_2,\ y \quad \psi_1^0(\varphi_2, y) = \begin{cases} x_0, & \varphi_2 = \varphi_2^0, \\ \varphi_1^-(y), & \varphi_2 \neq \varphi_2^0. \end{cases}$$

Выполняются условия $M_3(\varphi_2^0) \subset E_3$, $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$\min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2, \varphi_2(z)), z) \geq \min_{z \in E_3} F(\psi_1^0(\varphi_2^0, \varphi_2^0(z)), z) =$$
$$= \min_{z \in E_3} F(x_0, z) = M_{13},$$

то есть $\gamma(\overline{\Gamma}) \geq M_{13}$ и результат M_{13} гарантирован первому игроку.

3. Верно равенство $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = L_1$.

Результат L_1 всегда гарантирован первому игроку. Это наибольший результат, который он может себе обеспечить, применяя максимальную стратегию.

Таким образом, у первого игрока существуют стратегии, обеспечивающие ему получение выигрыша, не меньшего $\max(K_{13}, M_{13}, L_1)$. Легко показать, что больший выигрыш он гарантированно получить не может. Следовательно, верно равенство $\gamma(\overline{\Gamma}) = \max(K_{13}, M_{13}, L_1)$, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меньшиков И. С.* Игра трёх лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 5. С. 1148–1156.

2. *Кукушкин Н. С.* Бескоалиционные игры трёх лиц с фиксированной иерархической структурой // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 896–911.

3. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры трёх лиц с коалициями // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 41–43.

4. *Кузнецова И. А.* Об одном классе бескоалиционных иерархических игр трёх лиц // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 34–36.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

В настоящей статье рассматривается вопрос о базисах Рисса в $L_2[0,1]$ из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af = \alpha \int_0^x A_1(x,t) f(t)dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x,t) f(t)dt, \qquad (1)$$

где $\alpha^2 \neq 1$, $\frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_1(x,t) \left(\frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_2(x,t) \right)$ при $0 \leq k+l \leq 2$, причем, если $k+l=2$, то $k=l=1$, непрерывны при $t \leq x \, (t \geq x)$, $A_1(x, x-0) =$ $= A_2(x, x+0) = 1$.

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы, допускающие разрывы самих ядер или их производных, впервые рассматривались одним из авторов в [1]. В дальнейшем исследованию таких операторов было посвящено много работ (например, [2 – 4]). В частности, в [4] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)dt. \qquad (2)$$