В заключение отметим, что при определении гомотопических групп $\overline{\pi}_n$ часто удобно использовать более гибкое определение операции $*$. Для сфероидов $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}$ и $\beta_{\overline{m}^{(2)}}$, у которых $m_l^{(1)} = m_l^{(2)}$, определяем

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{m}^{(2)}}] = [\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\ldots,m_l^{(1)},\ldots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}],$$

где

$$\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\ldots,m_l^{(1)},\ldots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})} = \alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}} * \beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}},$$

$$\alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(1)}},\ldots,\tfrac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(1)}},\tfrac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(1)}},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n^{(1)}}\right) = \alpha_{\overline{m}^{(1)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(1)}},\ldots,\tfrac{k_l}{m_l^{(1)}},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n^{(1)}}\right),$$

$$\beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(2)}},\ldots,\tfrac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(2)}},\tfrac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(2)}},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n^{(2)}}\right) = \beta_{\overline{m}^{(2)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(2)}},\ldots,\tfrac{k_l}{m_l^{(2)}},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n^{(2)}}\right).$$

Доказательство того, что при этом получаются те же группы, проводится с использованием техники, примененной в [1. доказательство предложения 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалуев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 15-30.

УДК 517.984

А. П. Кочергин

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЙОСТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка на полуоси

$$y^{''} + \big[\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x)\big] y = 0, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, ρ – спектральный параметр, $q_1(x)$, $q_0(x)$ – комплекснозначные функции, такие что $q_1(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ при каждом фиксированном $T > 0$ и $q_0(x), q_1(x), q_1^{'}(x) \in$ $\in L(0, \infty)$.

Обозначим через W_N множество функций $f(x)$, $x \geq 0$ таких, что функции $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$, абсолютно непрерывны на $[0, T]$ при каждом фиксированном $T > 0$ и $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$, $j = \overline{0, N}$. Положим

$$\Omega^{\pm} = \{\rho : \pm Im\rho \geq 0, \rho \neq 0\}.$$

Введем решения $e_+(x,\rho)$ и $e_-(x,\rho)$ уравнения (1), определенные при $\rho \in \Omega^+$ и $\rho \in \Omega^-$, соответственно, такие что $\lim\limits_{x\to\infty} e_{\pm}(x,\rho)\exp(\mp i\rho x) = 1$. Функции $e_{\pm}(x,\rho)$ являются обобщениями решения Йоста для уравнения Штурма – Лиувилля ($q_1(x) \equiv 0$), которое подробно изучено и применяется при решении прямых и обратных спектральных задач, например в [1]. В [2] доказано существование решений $e_{\pm}(x,\rho)$, а также, что при $\rho \to \infty$ главные части их асимптотик имеют вид

$$h_+(x,\rho) = \exp(i\rho x + Q(x)), \quad h_-(x,\rho) = \exp(-i\rho x - Q(x))$$

соответственно, где $Q(x) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty} q_1(t)dt$. Однако подход, использованный в [2], не позволяет находить последующих членов асимптотики. Данная статья как раз посвящена их отысканию. Для этой цели используется иной подход, нежели в [2], основанный на выделении соответствующих главных частей при сведении (1) к интегродифференциальным уравнениям для функций $e_{\pm}(x,\rho)$. Кроме того, как и для оператора Штурма – Лиувилля, получено уточнение асимптотических формул в случае достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1). Сформулируем вспомогательное утверждение, необходимое в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $q(x) \in L(0,\infty)$, тогда*

$$\lim_{|\rho|\to\infty} \sup_{x\geq 0} \Big| \int\limits_x^{\infty} q(t)\exp(2i\rho(t-x))dt \Big| = 0, \quad \rho \in \Omega^+.$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [1, лемма 2.1.1].

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) $q_0(x) \in W_N$, $q_1 \in W_{N+1}$, $N \geq 0$, тогда существуют функции $\omega^{\pm}_{s\nu}(x) \in W_{N+2-s}$, такие что при $\rho \to \infty$, $\nu = 0, 1$, справедливо следующее асимптотическое представление:*

$$e^{(\nu)}_{\pm}(x,\rho) = (i\rho - \frac{1}{2}q_1(x))^{\nu} h_{\pm}(x,\rho)\Big(1 + \sum_{s=1}^{N+1} \frac{\omega^{\pm}_{s\nu}(x)}{(i\rho)^s} + o\Big(\frac{1}{\rho^{N+1}}\Big)\Big), \qquad (2)$$

причем

$$\omega_{10}^{+}(x)=\omega_{11}^{+}(x)=-\omega_{10}^{-}(x)=-\omega_{11}^{-}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}\Big[\frac{1}{4}q_1^2(t)-\frac{1}{2}q_1^{'}(t)+q_0(t)\Big]dt.$$

Доказательство. Проведем доказательство для функции $e_+(x,\rho)$, для $e_-(x,\rho)$ доказательство аналогично. Перепишем уравнение (1) в виде

$$y^{''}+\big[\rho^2+i\rho q_1(x)-\frac{1}{4}q_1^2(x)\big]y+\frac{q_1^{'}(x)}{2i\rho-q_1(x)}y^{'}=$$

$$=-\big[\frac{1}{4}q_1^2(x)+q_0(x)\big]y+\frac{q_1^{'}(x)}{2i\rho-q_1(x)}y^{'},\quad x\geq 0.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, приходим к интегро-дифференциальному уравнению для функции $e_+(x,\rho)$

$$e_+(x,\rho)=h_+(x,\rho)+$$

$$+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{2i\rho-q_1(t)}\Big(h_+(x,\rho)h_-(t,\rho)-h_+(t,\rho)h_-(x,\rho)\Big)\Big[\frac{1}{4}q_1^2(t)+q_0(t)\Big]e_+(t,\rho)dt-$$

$$-\int\limits_{x}^{\infty}\frac{q_1^{'}(t)}{(2i\rho-q_1(t))^2}\Big(h_+(x,\rho)h_-(t,\rho)-h_+(t,\rho)h_-(x,\rho)\Big)e_+^{'}(t,\rho)dt,\qquad(3)$$

$$\rho\in\Omega^+,\quad x\geq 0.$$

Дифференцируя (3) по x, получим

$$e_+^{'}(x,\rho)=(i\rho-\frac{1}{2}q_1(x))h_+(x,\rho)+$$

$$+(i\rho-\frac{1}{2}q_1(x))\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{2i\rho-q_1(t)}\Big(h_+(x,\rho)h_-(t,\rho)+h_+(t,\rho)h_-(x,\rho)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{1}{4}q_1^2(t)+q_0(t)\Big]e_+(t,\rho)dt-\qquad(4)$$

$$-(i\rho-\frac{1}{2}q_1(x))\int\limits_{x}^{\infty}\frac{q_1^{'}(t)}{(2i\rho-q_1(t))^2}\Big(h_+(x,\rho)h_-(t,\rho)+h_+(t,\rho)h_-(x,\rho)\Big)e_+^{'}(t,\rho)dt.$$

После преобразований $e_+(x,\rho) = h_+(x,\rho)u(x,\rho)$, $e'_+(x,\rho) = (i\rho - \frac{1}{2}q_1(x))\times$ $\times h_+(x,\rho)v(x,\rho)$ уравнения (3) и (4) примут вид

$$u(x,\rho) = 1 + \int\limits_x^{\infty} \frac{1 - \exp\big(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)\big)}{2i\rho - q_1(t)} \Big[\frac{1}{4}q_1^2(t) + q_0(t)\Big] u(t,\rho)dt -$$

$$- \int\limits_x^{\infty} \frac{q'_1(t)}{4i\rho - 2q_1(t)} \Big(1 - \exp\big(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)\big)\Big) v(t,\rho)dt, \quad (5)$$

$$v(x,\rho) = 1 + \int\limits_x^{\infty} \frac{1 + \exp\big(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)\big)}{2i\rho - q_1(t)} \Big[\frac{1}{4}q_1^2(t) + q_0(t)\Big] u(t,\rho)dt -$$

$$- \int\limits_x^{\infty} \frac{q'_1(t)}{4i\rho - 2q_1(t)} \Big(1 + \exp\big(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)\big)\Big) v(t,\rho)dt. \quad (6)$$

Применяя метод последовательных приближений к системе уравнений (5) и (6), получим

$$u(x,\rho) = 1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad |\rho| \to \infty, \quad \rho \in \Omega^+, \quad (7)$$

$$v(x,\rho) = 1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad |\rho| \to \infty, \quad \rho \in \Omega^+, \quad (8)$$

равномерно при $x \geq 0$. Подставляя (7) и (8) в правые части (5) и (6) и используя лемму 1, приходим к (2) для случая $N = 0$. Далее, подставляя полученную асимптотику функкий $u(x,\rho)$, $v(x,\rho)$ в правые части (5), (6), интегрируя по частям и применяя лемму 1, находим следующий член асимптотики для функций $e_\pm(x,\rho)$. Повторяя эту процедуру N раз, приходим к (2).

Теорема доказана.

Замечание. Указанная процедура позволяет найти явные формулы для всех функций $\omega^\pm_{s\nu}(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

2. *Jaulent M., Jean C.* The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy// Communications in Mathematical Physics (1965–1997). 1972. Vol. 28, № 3. P. 177–220.