УДК 513.6

Е. В. Коробченко

# ИЗОМОРФНОСТЬ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЧЕРЕЗ ТОЛЕРАНТНЫЕ СФЕРОИДЫ РАЗНОГО РАЗМЕРА

В статье [1] определены высшие гомотопические группы толерантных пространств с помощью кубических сфероидов. Однако в различных применениях толерантных гомотопических групп требуется более гибкое определение, использующее сфероиды произвольного размера.

В статье доказывается, что толерантные гомотопические группы, определенные этими различными способами представляют собой естественно изоморфные функторы.

**Определение 1.** *$n$-мерным толерантным сфероидом (Т-сфероидом) толерантного пространства $(X,\tau)$ в точке $x_0 \in X$ называется толерантное отображение $\alpha_m : (I_{m^{(n)}}, \iota_{m^{(n)}}) \longrightarrow (X,\tau)$ такое, что $\alpha_m(\partial I_M^{(n)}) = x_0$, $m \in \mathbb{N}$, где $I_m^{(n)} = \overset{n}{\times} I_m$, $I_m = \left\{\frac{k}{m} \middle| \ k = \overline{0,m}\right\}$, $\iota_m^{(n)} = \overset{n}{\times} \iota_m$, $\frac{k}{m}\iota_m\frac{l}{m} \overset{df}{\Longleftrightarrow} |k-l| \leqslant 1$.*

Если $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \longrightarrow (X,\tau)$ — Т-сфероид и $M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant n$, тогда определим Т сфероид $\alpha_{M,m} : (I_M^{(n)}, \iota_M^{(n)}) \longrightarrow (X,\tau)$ следующим образом:

$$(\forall k_i = \overline{0,M},\ i = \overline{1,n})\ \alpha_{M,m}\left(\left(\tfrac{k_i}{m}\right)_{i=1,n}\right) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_m\left(\left(\tfrac{k_i}{m}\right)_{i=1,n}\right),\ (\forall i = \overline{1,n})\ k_i \leqslant m; \\ x_0, (\exists i = \overline{1,n})\ k_i \geqslant m. \end{cases}$$

Сфероид $\alpha_{M,m}$ называется *продлением сфероида $\alpha_m$*.

**Определение 2.** *Два $n$-мерных сфероида $\alpha_{m_1}$, $\alpha'_{m_2}$ пространства $(X,\tau)$ в точке $x_0$ называются толерантно гомотопными и обозначаются $\alpha_{m_1} \simeq \alpha'_{m_2}$, если существуют натуральное $M \geqslant \max\{m_1, m_2\}$ и толерантная гомотопия $\alpha_{M,m_1} \sim \alpha'_{M,m_2}(rel\ \partial I_M^{(n)})$.*

Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности, символом $[\alpha_m]$ обозначается класс этого отношения с представителем $\alpha_m$.

На множестве $n$-мерных Т-сфероидов пространства $(X,\tau)$ в точке $x_0$ определяется операция, сопоставляющая двум сфероидам $\alpha_{m_1} : \left(I_{m_1}^{(n)}, \iota_{m_1}^{(n)}\right) \longrightarrow (X,\tau)$, $\beta_{m_2} : \left(I_{m_2}^{(n)}, \iota_{m_2}^{(n)}\right) \longrightarrow (X,\tau)$ новый сфероид

$\alpha_{m_1} * \beta_{m_2} : \left(I^{(n)}_{m_1+m_2}, \iota^{(n)}_{m_1+m_2}\right) \longrightarrow (X, \tau)$ такой, что

$$(\forall i = \overline{1, n})(\forall k_i = \overline{0, m_1 + m_2})\ \alpha_{m_1} * \beta_{m_2} \left(\left(\tfrac{k_i}{m_1+m_2}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_{m_1}\left(\left(\frac{k_i}{m_1}\right)_{i=\overline{1,n}}\right), (\forall i = \overline{1, n})\ k_i \leqslant m_1; \\ \beta_{m_2}\left(\left(\frac{k_i - m_1}{m_2}\right)_{i=\overline{1,n}}\right), (\forall i = \overline{1, n})\ k_i \geqslant m_1; \\ x_0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

На множестве классов толерантно гомотопных $n$-мерных Т-сфероидов произвольного размера корректно определена операция

$$[\alpha_{m_1}] * [\beta_{m_2}] = [\alpha_{m_1} * \beta_{m_2}], \tag{1}$$

превращающая множество $\pi_n(X, x_0)$ в группу, которая называется *$n$-й гомотопической группой толерантного пространства $(X, \tau)$ в точке $x_0$*.

Всякое толерантное отображение $f : ((X, \tau)), x_0) \longrightarrow ((Y, \theta), y_0)$ пунктированных толерантных пространств (т.е. $f(x_0) = y_0$) индуцирует гомоморфизм толерантных гомотопических групп $f_{\pi_n} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow$ $\longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$, корректно задаваемый формулой

$$f_{\pi_n}([\alpha_m]) = [f \circ \alpha_m]. \tag{2}$$

В результате для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем ковариантный функтор $\pi_n$ из категории пунктированных толерантных пространств в категорию групп. На самом деле этот функтор определен на категории толерантных гомотопических типов, так как всем толерантным отображениям из класса $[f]$ ставится в соответствии один и тот же гомоморфизм $f_{\pi_n}$.

Толерантные гомотопические группы можно определить, используя и более общее определение Т-сфероида. Для этого будем использовать $n$-мерные Т-кубы произвольного размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$, т.е. пространства $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \overset{df}{=} \left(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i}, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \iota_{m_i}\right)$. Обозначим эти группы $\overline{\pi}_n(X, x_0)$.

Заметим, что в каждом классе $[\alpha_{\overline{m}}]$, $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, имеется представитель $\alpha_{\overline{M}, \overline{m}} \in [\alpha_{\overline{m}}]$, где $\overline{M} = (M, \ldots, M)$, $M = \max\limits_{i=\overline{1,n}} m_i$. Обозначим $\alpha_M \overset{df}{=} \alpha_{\overline{M}, \overline{m}}$ и покажем, что отображение $\varphi_n : \overline{\pi}_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$, задаваемое формулой

$$\varphi_n([\alpha_{\overline{m}}]) \overset{df}{=} [\alpha_M], \tag{3}$$

корректно и является изоморфизмом групп $\varphi_n : \overline{\pi}_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$.

Корректность (3) означает, что выполняется свойство

$$\alpha_{\overline{m}^{(1)}} \simeq \alpha'_{\overline{m}^{(2)}} \Longrightarrow \alpha_{M^{(1)}} \simeq \alpha'_{M^{(2)}}. \tag{4}$$

Используя определение толерантно гомотопных сфероидов, (4) доказывается непосредственным построением гомотопий.

Как уже отмечалось выше $[\alpha_{\overline{m}}] = [\alpha_{\overline{M},\overline{m}}]$, а из (3) следует, что

$$\varphi_n[\alpha_{(m,\dots,m)}] = [\alpha_m]. \tag{5}$$

Отсюда, применяя аналог формулы (1) для сфероидов произвольного размера и (3), получаем

$$\varphi_n([\alpha_{\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{m}^{(2)}}]) = \varphi_n([\alpha_{\overline{M}^{(1)},\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{M}^{(2)},\overline{m}^{(2)}}]) =$$

$$= \varphi_n([\alpha_{\overline{M}^{(1)},\overline{m}^{(1)}} * \beta_{\overline{M}^{(2)},\overline{m}^{(2)}}]) =$$

$$= [\alpha_{\overline{M}^{(1)}} * \beta_{\overline{M}^{(2)}}] = [\alpha_{\overline{M}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{M}^{(2)}}] = \varphi_n([\alpha_{\overline{m}^{(1)}}]) * \varphi_n([\beta_{\overline{m}^{(2)}}]).$$

Таким образом, $\varphi_n$ – гомоморфизм. Его сюрьективность следует из (5). Для доказательства инъективности предположим, что $\varphi_n[\alpha_{\overline{m}}] = [\alpha_M] = [\varepsilon_{x_0}]$. Следовательно $\alpha_M \simeq \varepsilon_{x_0}$ в смысле определения 2. А так как $\alpha_{\overline{m}} \simeq \alpha_{\overline{M},\overline{m}}$, то в силу транзитивности отношения $\simeq$, имеем $\alpha_{\overline{m}} \simeq \varepsilon_{x_0}$, что показывает инъективность $\varphi_n$.

Отметим, что группы $\overline{\pi}_n(X, x_0)$, как и группы $\pi_n(X, x_0)$, для всякого $n \in \mathbb{N}$ определяют ковариантные функторы на категории пунктированных толерантных пространств (и на категории толерантных гомотопических типов) со значениями в категории групп. При этом толерантное пунктированное отображение $f : ((X, \tau), x_0) \longrightarrow ((Y, \theta), y_0)$ индуцирует гомоморфизмы

$$f_{\overline{\pi}_n} : \overline{\pi}_n(X, x_0) \longrightarrow \overline{\pi}_n(Y, y_0),\ f_{\overline{\pi}_n}([\alpha_{\overline{m}}]) \overset{df}{=} [f \circ \alpha_{\overline{m}}]. \tag{6}$$

Используя формулы (2), (3), (6), а также свойство пунктированности $f(x_0) = y_0$ и определение продления $\alpha_{\overline{M},\overline{m}}$, непосредственной проверкой доказывается естественность по $(X, \tau)$ изоморфизмов $\varphi_n : \overline{\pi}_n(X, x_0) \cong$ $\cong \pi_n(X, x_0)$ в категории пунктированных толерантных пространств.

Подводя итог, констатируем, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ функторы $\pi_n$ и $\overline{\pi}_n$ толерантных гомотопических групп естественно изоморфны на категории пунктированных толерантных пространств.*

В заключение отметим, что при определении гомотопических групп $\overline{\pi}_n$ часто удобно использовать более гибкое определение операции $*$. Для сфероидов $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}$ и $\beta_{\overline{m}^{(2)}}$, у которых $m_l^{(1)} = m_l^{(2)}$, определяем

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{m}^{(2)}}] = [\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\dots,m_l^{(1)},\dots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}],$$

где

$$\gamma^{(l)}_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)},\dots,m_l^{(1)},\dots,m_n^{(1)}+m_n^{(2)})} = \alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}} * \beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}},$$

$$\alpha^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(1)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(1)}},\dots,\tfrac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(1)}},\tfrac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(1)}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n^{(1)}}\right) = \alpha_{\overline{m}^{(1)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(1)}},\dots,\tfrac{k_l}{m_l^{(1)}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n^{(1)}}\right),$$

$$\beta^{s(l,k_l)}_{\overline{m}^{(2)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(2)}},\dots,\tfrac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(2)}},\tfrac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(2)}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n^{(2)}}\right) = \beta_{\overline{m}^{(2)}}\left(\tfrac{k_1}{m_1^{(2)}},\dots,\tfrac{k_l}{m_l^{(2)}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n^{(2)}}\right).$$

Доказательство того, что при этом получаются те же группы, проводится с использованием техники, примененной в [1. доказательство предложения 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалуев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 15-30.

УДК 517.984

**А. П. Кочергин**

## УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЙОСТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка на полуоси

$$y'' + \left[\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x)\right] y = 0, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, $\rho$ – спектральный параметр, $q_1(x)$, $q_0(x)$ – комплекснозначные функции, такие что $q_1(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ при каждом фиксированном $T > 0$ и $q_0(x), q_1(x), q_1'(x) \in \in L(0,\infty)$.