Из (10) и (16) следует утверждение теоремы. □

Аналогичный результат может быть получен при $\mathrm{Re}\lambda \le 0$.

Постановка задачи и результаты п. 1 принадлежат А. П. Хромову, а результаты п. 2 – М. Ш. Бурлуцкой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270), гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954. 258 с.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. Воронеж, 2010. № 2. С. 26–33.

УДК 512.7

А. М. ВОДОЛАЗОВ

АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗЛОЖИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

Пусть k – поле p-адических чисел, O – кольцо целых p-адических чисел, T – алгебраический k-тор. Для построения целых моделей алгебраических торов в работах [1, 2] введена алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\} \ ,$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. В работе [1] было замечено, что эта алгебра имеет бесконечный набор образующих и поставлен вопрос о нахождении всех образующих для разложимых торов $T = G_m^n$. Для разложимых торов образующие были найдены в работе [3]. Кроме алгебры просто целозначных функций, представляет интерес изучение ее различных подалгебр. В частности, для построения анализа на алгебраических торах надо рассматривать функции, целозначные вместе со своими разделенными или конечными разностями. Эти алгебры определяются как

$$A^{\{r\}} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \Phi f(U_k, x) \in A^{\{r-1\}}\}$$

и

$$A^{[r]} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \forall h \in U_k \quad \Delta_h f(x) \in A^{[r-1]}\}$$

соответственно. Где первая разделенная разность Φf для f равна

$$\Phi f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1},$$

а k-я разделенная разность $\Phi^k f(x_0, \ldots, x_k)$ определяется для $k > 1$ индукционно по формуле

$$\Phi^k f(x_0, \ldots, x_k) = \frac{\Phi^{k-1} f(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}) - \Phi^{k-1} f(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k)}{x_k - x_{k-1}}.$$

Операторы конечные разности Δ при $k = 1$ действует на f по правилу

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

при $k > 1$ Δ по индукции определяется следующем образом:

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_k} f(x) = \frac{\Delta_{h_1,\ldots,h_{k-1}} f(x+h_k) - \Delta_{h_1,\ldots,h_{k-1}} f(x)}{h_k}.$$

Мы требуем, чтобы x и все $x + h_i$ должны принадлежать U_k.

Алгебра $A^{\{r\}}$ является подалгеброй $A^{[r]}$, причем включение почти всегда строгое. Алгебра $A^{\{r\}}$ имеет бесконечное число образующих, и они были найдены в [4], используя аналоги v-порядков, введенных M. Bhargava. В нашей статье мы находим образующие алгебры $A^{[r]}$.

Рассмотрим сначала одномерный случай $T = G_m$. Для такого тора верна

Теорема 1. *Многочлены*

$$H_n(x) = \frac{1}{p^{d_n}} \prod_{i=1,\ (i,p)=1}^{p^k-1} (x-i) \prod_{\varphi(p^k)<j\le n} (x - x_j),$$

где n удовлетворяет неравенству $\varphi(p^k) < n \le \varphi(p^{k+1})$ ($\varphi(n)$ – функция Эйлера) и имеет разложение

$$n = n_k\varphi(p^k) + \cdots + n_1\varphi(p) + n_0,$$

а числа $d_n = 0$, если $s_n < r$, в противном случае $d_n = s_n - r$ и s_n находятся по формуле

$$s_n = n_k\alpha_k + \cdots + n_1\alpha_1,$$

где $0 \le n_i < p$, $\alpha_i = \frac{p^i-1}{p-1}$, *при* $0 < i \le k$ $n_k \neq 0$, $n_0 < p-1$, *являются образующими алгебры* $A^{[r]}$, *т.е.*

$$A^{[r]} = O[x, x^{-1}, H_1(x), \dots, H_n(x), \dots] \ .$$

Доказательство. Сначала докажем, что многочлены $H_n \in A^{[r]}$. Рассмотрим многочлены

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Нам надо определить наибольшую степень простого p, на которую делится образ $P_n(x)$, $\Delta_{h_1}P_n(x), \dots, \Delta_{h_1 \dots h_r}P_n(x)$ при $x \in U_k$. В [3] показано, как это делается для $P_n(x)$. Фактически мы определяем точное количество приведенных систем вычетов по модулям p^s, на которые разбиваются числа x_i.

Рассмотрим представление

$$\Delta_h P_n(x) = \frac{P_n(x+h) - P_n(x)}{h} = P_n'(x) + \frac{P_n''(x)}{2!}h + \dots,$$

так как $P_n'(x) = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1, j\neq i}^{n}(x - x_i)$, то у нас может происходить потеря в количестве приведенных систем вычетов на единицу. Если h p - адическая единица, то показатель у $\Delta_h P_n(x)$ будет совпадать с показателем $P_n(x)$ по левой части формулы. Если p-адический показатель $ord_p h > 0$, то наименьший показатель в правой части будет у $P_n'(x)$, а здесь происходит потеря на единицу. По индукции показываем, что у r-разности происходит уменьшение показателя на r. Поэтому для определения d_n определяется через s_n, найденных в [3], из формулировки теоремы. Так доказывается, что $H_n \in A^{[r]}$.

Далее, так как $\deg H_n = n$, то любой многочлен раскладывается через многочлены H_n с коэффициентами из k. Определяя числа x_n, как в [3], мы получаем, что $\Delta_{h_1,\dots,h_k}H_i(x_n)$ при $i > n$ равны 0 или имеют больший p-адический показатель. Из этого следует, что $P \in A^{[r]}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты в разложении P через многочлены H принадлежат O, что и доказывает теорему 1.

Теорема 1 обобщается на многомерный случай, когда $T = G_m^n$.

Теорема 2. *Многочлены*

$$H_{\alpha_1,\dots\alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = H_{\alpha_1}(x_1)\dots H_{\alpha_n}(x_n),$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, *являются образующими алгебры* $A^{[r]}$ *для алгебраического тора* $T = G_m^n$.

$$A^{[r]} = O[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}, \dots, H_{\alpha_1,\dots\alpha_n}(x_1, \dots, x_n)\dots].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kunyvskii B. E., Moroz B. Z., Voskresenskii V. E.* On integral models of an algebraic torus / Max-Planck-Institut fur Mathematik. Preprint Series. 2001. №12.

2. *Popov S. Yu., Voskresenskii V. E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori//Communications of Algebra. 2001. № 9. P. 213–223.

3. *Водолазов А. М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа //Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 14–23.

4. *Bhargava M., Cahen P.-J., Yeramian J.*Finite generation properties for various rings of integer-valued polynomials // J. of Algebra. 2009. Vol. 322, № 4. P. 1129–1150.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РИСКА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Пусть θ_i – доли активов n видов, из которых инвестор формирует портфель, b_i, $i = \overline{1, s}$, $s \le n$ – ограничения на доли активов, заставляющие инвестора отказаться от подневольного желания «получить высокий доход любой ценой» и учесть неценовые оценки качества активов. В качестве рисковых показателей σ_i могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски (σ_i) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D}, \tag{1}$$

$$D = \left\{ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \, \theta_i \le b_i, i = \overline{1, s} \right\}. \tag{2}$$

В [1] решена задача равномерного распределения риска с целевой функцией (1) и такими же ограничениями, как в известной задаче минимизации риска финансового портфеля Г. Марковица.

Теорема 1. *Решение задачи (1),(2) существует тогда и только тогда, когда либо $s < n$, либо $s = n$ и $\sum_{i=1}^{n} b_i \ge 1$.*