УДК 517.51

Т. В. Иофина

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, $2 \le p_i < N$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbb{Z}$ и $0 \le x_n < p_n$. Для таких $x, y \in [0,1)$ определим разность $z = x \ominus y$, где $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n}, z_i = x_i - y_i \pmod{p_i}$. Каждое целое неотрицательное k представимо в виде $k = \sum_{n=1}^{\infty} m_{n-1} k_n$, $k_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$. Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ определим $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)$. Известно, что система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая *системой Виленкина*, ортонормирована и полна в $L[0,1)$ (эти и другие свойства системы см. в [1]). Если $f \in L[0,1)$, то $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\, dt$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\chi_k(x)$. В статье изучаются оценки приближений функций величинами $\mathcal{E}_{n+1}(f) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1}(f)$, называемыми *средними Эйлера.* Далее рассматриваются пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$. Пусть $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \le x < 1} |f(x)|$. Тогда $C^*[0,1)$ есть множество ограниченных функций, таких что $\lim\limits_{h \to 0+} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_\infty = 0$. Пусть $\mathscr{P}_n := \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда наилучшее приближение по системе Виленкина порядка n вводится следующим образом: $E_n(f)_p := \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathscr{P}_n\}$. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая к нулю положительная последовательность. По определению $E_p(\varepsilon)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$, $p = \infty$, таких что $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} = \|f\|_p + \sup_{k \in \mathbb{N}} E_k(f)_p/\varepsilon_k < \infty$.

Пусть также $A_{r,p} = 1$ при $1 < p < \infty$ и $A_{r,p} = \ln(r+2)$ при $p = 1, \infty$.

Лемма 1. *Для $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, верно неравенство $\|S_n(f,x)\|_p \le C\|f\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, где C не зависит от f и n.*

Для произвольных (в том числе и неограниченных) последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ лемма установлена Шиппом [2] и Шимоном [3].

Лемма 2 [4, глава 4, §4]. *Существует $C > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка $\|D_n\|_1 \le C \ln(n+2)$.*

Из лемм 1 и 2 выводится следующая лемма.

Лемма 3. *Для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, и $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|\mathcal{E}_{n+1}(f)\|_p \le C(p)\|f\|_p A_{n,p}$.*

Следствие 1. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ ($p = \infty$), тогда при $k \ge n$ справедливо неравенство $E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p \le$ $\le C_p E_n(f)_p A_{k,p}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{E}_{k+1}(f) \in \mathscr{P}_{k+1}$, и следовательно, $E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p = 0$ при $k+1 \le n$. Пусть $k+1 > n$ и $t_n \in \mathscr{P}_n$ таков, что $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$. Применяя лемму 3 и учитывая, что $\mathcal{E}_{k+1}(t_n) \in \mathscr{P}_n$, выводим требуемое неравенство

$$E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p \le \|\mathcal{E}_{k+1}(f) - \mathcal{E}_{k+1}(t_n)\|_p \le$$
$$\le C_1 \|f - t_n\|_p A_{k,p} = C_1 E_n(f)_p A_{k,p}.$$

Следствие доказано.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)(p = \infty)$. Тогда $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p \le C(p) 2^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p$.*

Доказательство. Пусть $E_{n+1}(f)_p = \|f - t_{n+1}\|_p$, $t_{n+1} \in \mathscr{P}_{n+1}$. Тогда в силу оценки леммы 3 имеем

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p \le \|\mathcal{E}_{n+1}(f) - \mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1})\|_p + \|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p + \|t_{n+1} - f\|_p \le$$
$$\le \|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p + C_1 A_{n,p} E_{n+1}(f)_p.$$

Так как при $k \le n$ справедливо

$$E_{k+1}(t_{n+1})_p \le E_{k+1}(t_{n+1} - f)_p + E_{k+1}(f)_p \le$$
$$\le E_{n+1}(f)_p + E_{k+1}(f)_p \le 2E_{k+1}(f)_p,$$

оценка для $\|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p$ примет вид

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p \le 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,p} \|S_{k+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p \le$$

$$\le C_2 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(t_{n+1})_p \le C_2 2^{-n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p.$$

Для доказательства теоремы осталось показать неравенство

$$A_{n,p} E_{n+1}(f)_p \le C_3 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p. \tag{1}$$

При $1 < p < \infty$ имеем $A_{n,p} = 1$, и неравенство (1) с константой $C_3 = 1$ следует из убывания $E_k(f)_p$ по k.

Рассмотрим случай $p = 1, \infty$. Тогда

$$2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k+2}{n+2} \geq 2^{-n}\left(3^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}\right) = \frac{1}{6}.$$

Используя последнее неравенство и убывание $\ln x/x$ при $x \geq e$, при $n \in \mathbb{N}$ полностью доказываем оценку (1):

$$\ln(n+2)E_{n+1}(f)_p \leq$$

$$\leq C_4 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+2)\ln(n+2)E_{n+1}(f)_p/(n+2) \leq$$

$$\leq C_4 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+2)\ln(k+2)E_{k+1}(f)_p/(k+2) =$$

$$= C_4 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ln(k+2)E_{k+1}(f)_p.$$

Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ имеем $\mathcal{E}_k(f) \in E_p(\varepsilon)$, причем справедлива оценка $\|\mathcal{E}_{k+1}(f)\|_{E_p(\varepsilon)} \leq$ $\leq C(p)A_{k,p}\|f\|_{E_p(\varepsilon)}$.*

Доказательство вытекает из определения норм, леммы 3 и следствия 1.

Теорема 2. *Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \leq p \leq \infty$, последовательности $\varepsilon, \delta, \lambda$ таковы, что ε_n, δ_n и $\lambda_n = \varepsilon_n/\delta_n$ положительны и убывают к 0, причем*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon_{k+1} = O(2^n\varepsilon_{n+1}). \tag{2}$$

Тогда справедливо неравенство $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_{E_p(\delta)} \leq C(p)A_{n,p}\lambda_n$.

Доказательство. По следствию 1 получаем, что справедливо

$$E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p \leq E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f))_p + E_k(f)_p \leq (1 + A_{n,p})E_k(f)_p \leq C_1A_{n,p}\varepsilon_k,$$

и как следствие $\sup\limits_{k\geq n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p/\delta_k \leq C_1A_{n,p}\lambda_n$.

Так как для любой функции $f \in L_p$ верно $E_k(f)_p \leq \|f\|_p$, имеем

$$\sup_{0\leq k<n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p/\delta_k \leq \|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p/\delta_n.$$

Подставляя условие (2) в неравенство теоремы 1, получаем

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p = O(A_{n,p}\,\varepsilon_n),$$

откуда

$$\sup_{0\le k\le n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)/\delta_k = O(A_{n,p}\lambda_n).$$

Оценка

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p = O(A_{n,p}\lambda_n)$$

в силу убывания δ_n к 0 очевидна.

Подставляя полученные выше оценки в определение нормы, получаем нужное неравенство.

Теорема доказана.

Теорема 2 является аналогом теоремы, доказанной для тригонометрических рядов в [5] для пространств типа Гёльдера.

Следствие 2. *Пусть $\varepsilon_k = k^{-\beta}$, $\delta_k = k^{-\alpha}$, $0 < \alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $f \in E_p(\varepsilon)$ имеем $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_{E_p(\delta)} \le CA_{n,p}n^{\alpha-\beta}$.*

Автор выражает благодарность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект 10-01-00097-а*), *гранта Президента РФ* (*проект НШ-4383.2010.1*).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Schipp F.* On L^p-norm convergence of series with respect to product systems // Anal. Math. 1976. № 2. P. 49–64.

3. *Simon P.* Verallgemeinerte Walsch-Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1976. T. 3–4, № 27. P. 329–341.

4. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. № 140. P. 141–153.