Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерно распределённым риском // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 18–20.

УДК 514.764

С. В. Галаев

О ПРОДОЛЖЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗНОСТИ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

В статье вводятся понятия *внутренней связности и продолженной связности неголономного многообразия* коразмерности 1. Для случая контактного пространства с финслеровой метрикой доказывается существование и единственность метрической продолженной связности. Тензор кривизны продолженной метрической связности в случае неголономного многообразия с римановой метрикой оказывается равным тензору кривизны Вагнера, построенного им для произвольного неголономного многообразия коразмерности 1 с внутренней аффинной связностью [1]. Подробные доказательства всех сформулированных утверждений содержатся в [2].

Введение. В качестве обобщения известного подхода к определению связности с помощью горизонтального распределения, заданного на касательном расслоении к гладкому многообразию X в работе [3] вводится понятие *связности над распределением*. В [4] аналогичный объект называется *связностью на расслоении вдоль распределения на базе*. Неголономное многообразие есть гладкое многообразие с заданным на нем распределением D. Это распределение, в ряде случаев называемое неголономным многообразием, вообще говоря, неинтегрируемо. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было введено Вагнером (см. [4]). Развивая геометрию неголономных многообразий, В. В. Вагнер вводит понятие внутренней геометрии неголономного многообразия как совокупности тех свойств объектов, заданных в неголономном многообразии, которые зависят только от самого неголономного многообразия и от его оснащения [5]. Параллельный перенос внутри неголономного многообразия осуществляется с помощью связности ∇, которую, следуя терминологии В. В. Вагнера, мы называем *внутренней связностью неголономного многообразия*. Помимо внутренней связности в ряде работ рассматриваются связности, осуществляющие параллельный перенос векторов, лежащих в распределении D, вдоль произвольных кривых многообразия X. Такие связности называются *усеченными связностями.* По сути, усеченная связность является связностью в векторном расслоении, определяемом неголономным многообразием. Среди усеченных связностей в работе [2] был выделен класс *продолженных связностей неголономного многообразия.* Применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой внутренние связности изучались в работах [6, 7]. В настоящей статье доказывается существование метрической продолженной связности, однозначно определяемой внутренней связностью контактного пространства с финслеровой метрикой.

1. Внутренние связности неголономного многообразия. Всюду в работе под многообразием X понимается связное C^{∞}-многообразие размерности $(2n+1)$, $n \geq 2$. Все встречающиеся на X функции и геометрические объекты считаются бесконечно дифференцируемыми. Мы предполагаем, что на многообразии X задана 1-форма λ такая, что ранг формы $\omega = d\lambda$ равен $2n$ и имеет место разложение $TX = D \oplus D^{\perp}$, где $D = ker\lambda$, $D^{\perp} = ker\omega$. Гладкое распределение D мы, следуя В. В. Вагнеру, будем называть *неголономным многообразием*, а распределение $D^{\perp}$ – его *оснащением.* Под допустимым векторным полем к произвольному распределению D будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в данном распределении, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на соответствующем оснащении $D^{\perp}$. Наконец, допустимое тензорное поле к распределению D – есть линейная комбинация тензорных произведений допустимых векторных полей и допустимых 1-форм. Допустимые тензорные поля типа (p,q) к распределению D обозначим $f^p_q(D)$.

Карту $K(x^{\alpha})$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, ..., 2n+1; a, b, c = 1, 2, ..., 2n)$ на многообразии X будем называть *адаптированной к неголономному многообразию* D, если $\partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \in f^1_0(D^{\perp})$. Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$, $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$.

Пусть $P: TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^a)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_{\alpha}) = \vec{e}_{\alpha} = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_{\alpha})$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha}, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Векторные поля $(\vec{e}_{\alpha})$ определяют в неголономном многообразии линейные координаты, называемые Вагнером градиентными.

Будем говорить, что в неголономном многообразии D задана внутренняя связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Таким образом, задание внутренней связности эквивалентно заданию объекта $G_n^a(x^a, x^n)$ такого, что $HD = span(\vec{\epsilon}_\alpha)$, где $\vec{\epsilon}_\alpha = \partial_n - \Gamma_a^n\partial_n - G_a^b\partial_{n+b}$. В частном случае, когда внутренняя связность определяется линейной связностью, имеют место равенства $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha)x^{n+a}$.

2. Продолженные связности неголономного многообразия с допустимой финслеровой метрикой. Будем называть связность в векторном расслоении D, определяемую горизонтальным распределением $HT = HD \oplus span\,\vec{u}$, где $\pi_*\vec{u} = \partial_n$, *продолженной связностью неголономного многообразия*. Легко установить, что векторное поле $\vec{u}$ в этом случае должно иметь вид $\vec{u} = \partial_n - G_n^a\partial_{n+a}$. Таким образом, задание продолженной связности сводится к определению объекта G_n^a. Имеет место

Теорема. *Существует единственная продолженная связность неголономного многообразия с допустимой финслеровой метрикой, сохраняющей длину параллельно переносимого вектора.*

Подробное доказательство теоремы содержится в [2]. Здесь лишь заметим, что допустимая финслерова метрика определяется гладкой функцией, заданной на распределении D как на гладком многообразии, и удовлетворяющей обычным свойствам. По существу, доказательство теоремы сводится к вычислению объекта G_n^a.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

2. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : http://arxiv.org/abs/1103.4337. 2011.

3. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1987. № 16. С. 5–85.

4. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 173 с.

5. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937). Отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.

6. *Галаев С. В., Челышев В. Т.* О допустимых тензорных структурах на неголономном многообразии.// Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 19–21.

7. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В статье вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминах внутренней геометрии дается описание некоторых классов пространств с почти контактной метрической структурой. Вводится новый тип почти контактных метрических пространств – эрмитовых почти контактных метрических пространств.

Введение. В терминологии В. В. Вагнера [1, 2] многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства X как совокупность тех свойств, которыми обладают: гладкое распределение D, задаваемое контактной формой η; допустимое поле аффинора φ (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что $\varphi^2 = -1$; поле допустимых тензоров римановой метрики g, связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y}$ – допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма $\omega = d\eta$; векторное поле $\vec{\xi}$, называемое полем Риба, определяющее оснащение распределения D – $\vec{\xi} \in D^{\perp}$, и однозначно определяемое равенствами $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$ в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг; внутренняя связность ∇, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем g; связность ∇^1, являющаяся естественным продолжением связности ∇ и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X.

1. Допустимые тензорные структуры. Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$ – $C^{\infty}(X)$-модуль гладких векторных полей на X, d – оператор внешнего дифференцирования. Все