2. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : http://arxiv.org/abs/1103.4337.

3. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

4. *Galaev S. V.* The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds // URL : http://arxiv.org/abs/1107.5532.

5. *Blair D. E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Birkhauser, Boston, 2002.

УДК 517.984

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

В статье предложен новый элементарный метод получения асимптотических формул для решения двумерного уравнения Дирака. Используя этот метод, получены уточненные асимптотические формулы решений при больших значениях спектрального параметра.

Рассматривается следующая система Дирака:

$$y'(x) + P(x)y(x) = \lambda D y(x), \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T – знак транспонирования), $y_j \in C^1[0,1]$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $q_j \in C^1[0,1]$, λ – комплексный параметр.

В случае подобного скалярного уравнения (если $P(x)$, $y(x)$ – скалярные функции) слагаемое $P(x)y(x)$ уничтожается известной подстановкой. В векторном случае этого, вообще говоря, сделать нельзя. Здесь используется метод, называемый *L-диагонализацией*: с помощью определенной подстановки слагаемое $P(x)y(x)$ не уничтожается, но делается сколь угодно малым (имеет оценку $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$). Этот метод, описанный, например, у И. М. Раппопорта [1], позволяет получить для общего решения уравнения (1) следующую асимптотическую формулу:

$$y(x,\lambda) = \left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right) e^{\lambda D x} c, \tag{2}$$

где E – единичная матрица 2×2, $c = (c_1, c_2)^T$ – произвольный вектор, матрица-функция $O\left(\lambda^{-1}\right)$ регулярная [1] в полуплоскостях $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ и

[1]Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

$\operatorname{Re}\lambda \le 0$ при $|\lambda|$ достаточно больших. Формула (2) имеет важное значение при изучении спектральных свойств соответствующих операторов и в различных приложениях.

В данной статье предлагается новый простой элементарный метод доказательства формулы (2), используя который получаются уточненные асимптотические формулы решений системы (1) при больших значениях $|\lambda|$. Эти формулы применяются, например, при решении методом Фурье смешанных задач с инволюцией, порождающих уравнение вида (1) [2].

Отметим, что $P(x)$ может быть произвольной матрицей с непрерывно дифференцируемыми компонентами $p_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$. Легко показать, что замена $y(x) = \operatorname{diag}\big(e^{-\int_0^x p_{11}(t)}\, dt, e^{-\int_0^x p_{22}(t)}\, dt\big)u(x)$ приводит к уравнению с матрицей рассматриваемого вида.

1. Приведем описание нового элементарного метода, с помощью которого можно получить (2). Для проведения различных оценок будет использоваться утверждение, легко следующее из формулы интегрирования по частям.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ *и* $q(x) \in C^1[0,1]$, *то*

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q(\tau)\, d\tau = O\left(\lambda^{-1} e^{-2\lambda t}\right), \quad \int_t^x e^{2\lambda\tau} q(\tau)\, d\tau = O\left(\lambda^{-1} e^{2\lambda x}\right). \tag{3}$$

Система (1) в покомпонентной записи имеет вид

$$y_1'(x) - \lambda y_1(x) = -q_2(x) y_2(x), \tag{4}$$

$$y_2'(x) + \lambda y_2(x) = -q_1(x) y_1(x). \tag{5}$$

Проинтегрировав (4), (5) и выполнив замену $w_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$, получим

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt, \tag{6}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t)\, dt. \tag{7}$$

Чтобы построить фундаментальную матрицу решений системы (6), (7), найдем две пары линейно независимых решений.

Пусть для определенности $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Выполним подстановку (7) в (6):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t)\, dt \int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\, d\tau. \quad (8)$$

Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и учитывая (3), получим $w_1(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, и отсюда и из (7) $w_2(x) = O\left(\lambda^{-1} e^{2\lambda x}\right)$.

Далее, положим $c_2 = 1$ и подставим (6) в (7). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) \left[c_1 - \int\limits_0^t e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) w_2(\tau)\, d\tau \right] dt =$$
$$= 1 - c_1 \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt \int\limits_t^x e^{2\lambda\tau} q_1(\tau)\, d\tau.$$

Положим $\varphi(x, \lambda) = \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\, dt$. Тогда $\int\limits_t^x e^{2\lambda\tau} q_1(\tau)\, d\tau = \varphi(x, \lambda) - \varphi(t, \lambda)$, и

$$\begin{aligned} w_2(x) = 1 - \varphi(x, \lambda) \left[c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt \right] - \\ - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) \varphi(t, \lambda)\, dt. \end{aligned} \quad (9)$$

По лемме 1 $\varphi(x, \lambda) = O\left(\lambda^{-1} e^{2\lambda x}\right)$. Поэтому, полагая $c_1 = \int\limits_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\, dt$ и снова учитывая оценки (3), из (9) получим, что

$$w_2(x) = 1 + \int\limits_0^1 O\left(\lambda^{-1}\right) w_2(t)\, dt.$$

Отсюда $w_2(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$. Тогда $w_1(x) = \int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt = O\left(\lambda^{-1} e^{-2\lambda x}\right)$.

Выполняя обратную замену, придем к следующему утверждению.

Теорема 1. *При $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ фундаментальная матрица решений системы (1) имеет асимптотическое представление*

$$Y(x, \lambda) = \left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right) e^{\lambda D x}.$$

2. Используя описанный в п. 1 метод, получим уточненные асимптотические формулы решений системы (1) при больших $|\lambda|$.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Re}\lambda \ge 0$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для общего решения уравнения (1) имеем следующую асимптотическую формулу:*

$$y(x,\lambda) = U(x,\lambda)e^{\lambda D x}c,$$

где $U(x,\lambda) = (u_{ij}(x,\lambda))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1, c_2)^T$ *– произвольный вектор и*

$$u_{11}(x,\lambda) = 1 + \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{12}(x,\lambda) = \tfrac{1}{2\lambda}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int\limits_x^1 e^{2\lambda(x-t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{21}(x,\lambda) = -\tfrac{1}{2\lambda}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int\limits_0^x e^{-2\lambda(x-t)}q_1'(t)\,dt\right) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{22}(x,\lambda) = 1 - \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right).$$

Доказательство. Получим уточненные асимптотические формулы для решений системы (6), (7). Константы c_k выбираем так же, как в п. 1.

1) Положим сначала в (6), (7) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, откуда по доказанному $w_1(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$. Подставляя теперь эту оценку в правую часть (8), получим

$$w_1(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\,d\tau +$$
$$+\int\limits_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)O\left(\lambda^{-1}\right)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\,d\tau.$$

В силу леммы 1 последнее слагаемое имеет оценку $O\left(\lambda^{-2}\right)$. Так как

$$\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2\lambda}\,e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\Big|_t^x + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2'(\tau)\,d\tau,$$

то

$$w_1(x) = 1 + \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt - \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x e^{2\lambda(t-x)}q_1(t)q_2(t)\,dt +$$
$$+\tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2'(\tau)\,d\tau + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right) =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right).$$

Подставляя теперь это выражение в (7), получим

$$w_2(x) = -\int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\Big[1 + \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^t q_1(\tau)q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right)\Big]\,dt =$$
$$= -\int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt - \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt\int\limits_0^t q_1(\tau)q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{2\lambda x} =$$
$$= -\tfrac{1}{2\lambda}\Big[e^{2\lambda x} q_1(x) - q_1(0) - \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1'(t)\,dt\Big] + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{2\lambda x}.$$

Отсюда для решений системы (4), (5) имеем

$$y_1(x) = w_1(x)e^{\lambda x} = \left(1 + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)e^{\lambda x},$$

$$y_2(x) = w_2(x)e^{-\lambda x} = -\frac{1}{2\lambda}\Big[q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int\limits_0^x e^{2\lambda(t-x)} q_1'(t)\,dt\Big]e^{\lambda x} +$$
$$+ O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{\lambda x}. \qquad (10)$$

2) Положим теперь в (6), (7) $c_1 = \int\limits_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t)\,dt$, $c_2 = 1$. Тогда по доказанному в п. 1 из (9) имеем

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t)\varphi(t,\lambda)\,dt, \quad (11)$$

и справедлива оценка $w_2(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$. Подставим эту оценку в (11):

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)\,dt - \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)O\left(\lambda^{-1}\right)\,dt -$$

$$- \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\varphi(t,\lambda)\,dt - \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)O\left(\lambda^{-1}\right)\varphi(t,\lambda)\,dt. \qquad (12)$$

Далее имеем

$$\int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\varphi(t,\lambda)\,dt = \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\,dt \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} q_1(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\left\{\tfrac{1}{2\lambda}[q_1(t)e^{2\lambda t} - q_1(0)] - \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} q_1'(\tau)\,d\tau\right\} dt =$$
$$= \tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right).$$

Остальные интегральные слагаемые в (12) имеют оценку $O\left(\lambda^{-2}\right)$. Поэтому из (12)

$$w_2(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{13}$$

Подставим (13) в (6):

$$\begin{gathered} w_1(x) = \int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t)\,dt = \int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)\,dt - \\ -\tfrac{1}{2\lambda}\int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)\,dt \int\limits_0^t q_1(\tau)q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right)\int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)\,dt. \end{gathered} \tag{14}$$

Выполняя в первом интеграле интегрирование по частям, во втором – замену порядка интегрирования и применяя оценки (3), получим из (14)

$$w_1(x) = \frac{1}{2\lambda}\left[q_2(x)e^{-2\lambda x} - q_2(1)e^{-2\lambda} + \int\limits_x^1 e^{-2\lambda t} q_2'(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-2\lambda x}. \tag{15}$$

Таким образом из (15) и (13):

$$y_1(x) = w_1(x)e^{\lambda x} = \frac{1}{2\lambda}\left[q_2(x) - q_2(1)e^{2\lambda(x-1)} + \int\limits_x^1 e^{2\lambda(x-t)} q_2'(t)\,dt\right] e^{-\lambda x} +$$
$$+ O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda x}, \tag{16}$$

$$y_2(x) = w_2(x)e^{-\lambda x} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) e^{-\lambda x}.$$

Из (10) и (16) следует утверждение теоремы. □

Аналогичный результат может быть получен при $\mathrm{Re}\lambda \le 0$.

Постановка задачи и результаты п. 1 принадлежат А. П. Хромову, а результаты п. 2 – М. Ш. Бурлуцкой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270), гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954. 258 с.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. Воронеж, 2010. № 2. С. 26–33.

УДК 512.7

А. М. ВОДОЛАЗОВ

АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗЛОЖИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

Пусть k – поле p-адических чисел, O – кольцо целых p-адических чисел, T – алгебраический k-тор. Для построения целых моделей алгебраических торов в работах [1, 2] введена алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\}\ ,$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. В работе [1] было замечено, что эта алгебра имеет бесконечный набор образующих и поставлен вопрос о нахождении всех образующих для разложимых торов $T = G_m^n$. Для разложимых торов образующие были найдены в работе [3]. Кроме алгебры просто целозначных функций, представляет интерес изучение ее различных подалгебр. В частности, для построения анализа на алгебраических торах надо рассматривать функции, целозначные вместе со своими разделенными или конечными разностями. Эти алгебры определяются как

$$A^{\{r\}} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \Phi f(U_k, x) \in A^{\{r-1\}}\}$$

и

$$A^{[r]} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \forall h \in U_k \quad \Delta_h f(x) \in A^{[r-1]}\}$$