2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 340 с.

о

УДК 514.764

А. В. Букушева

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА – МООРА КАК ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

На многообразии с метрикой Бервальда – Моора естественным образом определяется полиаффинорная алгебра, являющаяся обобщением алгебры поличисел [1, 2]. Определяются условия, при которых многообразие с полиаффинорной алгеброй наделяется структурой пространства над алгеброй поличисел.

Введение. Под *пространством поличисел* понимается коммутативная ассоциативная алгебра, естественным образом согласованная с метрической функцией Бервальда – Моора (БМ). Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha$. Исследование пространств такого вида получило свое развитие в работах [1, 2]. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие M, то соответствующая метрика БМ определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия M. В настоящей статье на многообразии M с метрикой БМ, определяемой полилинейной формой g, естественным образом задается полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. В случае, когда тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ интегрируема, мы получаем уже известное пространство поличисел. Используя сведения по интегрируемым аффинорным структурам и пространствам над алгебрами, содержащиеся в обзорах [3, 4], а также работу по гиперкомплексным структурам [5], мы находим условия, при которых финслерово многообразие с метрикой БМ и согласованной с ней полиаффинорной структурой является пространством над алгеброй поличисел.

1. Определение полиаффинорной структуры. Пусть M – связное C^∞-многообразие размерности n. Все встречающиеся на M функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. Рассмотрим на многообразии M алгебраическую метрику n-го порядка, т.е. поле n-линейных симметрических форм g с компонентами $g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x)$ относительно произвольного, вообще говоря, неголономного поля базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Будем говорить, что ненулевой вектор $\vec{e}$ определяет *нулевое направление формы* g, если

$$g(\vec{e}, \vec{e}, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n) = 0.$$

Не нулевая алгебраическая метрика называется *метрикой Бервальда – Моора*, если существует поле базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ таких, что каждый вектор $\vec{e}_\alpha$ базиса задает нулевое направление формы g. Такое поле базисов будем называть *адаптированным базисом формы* g или просто адаптированным базисом. Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту $g_{12\ldots n}$. В области определения поля адаптированных базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ определим n-гладких одномерных распределений D_1, D_2,..., D_n, полагая

$$D_\alpha = \langle \vec{e}_\alpha \rangle \,. \tag{1}$$

Из сформулированного ниже предложения следует, что распределения D_1, D_2,..., D_n могут быть корректно определены на всем многообразии M.

Предложение. *Всякий вектор $\vec{e}$, задающий нулевое направление формы g, коллинеарен одному из векторов адаптированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.*

Таким образом, определение распределений D_α не зависит от выбора адаптированного базиса, и метрика БМ определяет на M структуру почти произведения:

$$TM = \oplus_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \,. \tag{2}$$

Очевидно, что две метрики g_1, g_2 БМ конформны ($g_1 = \lambda(x) g_2$) тогда и только тогда, когда они определяют одно и то же разложение (2).

Рассмотрим n распределений $D_{\hat{\alpha}}$, определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \cdots D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \cdots \oplus D_n \,.$$

Для любого α, таким образом, получаем разложение

$$TM = D_\alpha \oplus D_{\hat{\alpha}} \,. \tag{3}$$

Разложение (3) определяет семейство проекторов

$$\varphi_\alpha : TM \to D_\alpha \ .$$

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n-мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами AH_n, изоморфную алгебре P_n. Будем говорить, что алгебра AH_n согласована с метрикой g. Еще раз подчеркнем, что задание метрики БМ влечет задание полиаффинорной алгебры специального вида. Обратно, если на гладком многообразии задана полиаффинорная алгебра, определяемая разложением (2), то всякая полилинейна форма, удовлетворяющая равенству

$$g(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) = \sum_\sigma g(\varphi_1(\vec{x}_{\sigma(1)}), \varphi_2(\vec{x}_{\sigma(2)}), ..., \varphi_n(\vec{x}_{\sigma(n)})), \qquad (4)$$

представляет собой метрику БМ, согласованную с полиаффинорной структурой. Любые две такие метрики конформны.

Базис, адаптированный форме g, естественно назвать адаптированным к полиаффинорной алгебре. Впредь такой базис будем называть *адаптированным*.

Если на многообразии M существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g, то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразие M может рассматриваться как многообразие $M(P_n, g)$ над алгеброй поличисел P_n. Будем считать, что полиаффинорная алгебра интегрируема, а любая используемая система координат – адаптированная.

2. Связности, совместимые с метрикой БМ. Рассмотрим задачу нахождения связности, совместимой с метрикой БМ. Имеет место

Теорема 1. *На многообразии $M(P_n, g)$ существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ g.*

Предположим, что на $M(P_n, g)$ существует линейная связность ∇, совместимая с метрикой g. Используя равенство $\nabla g = 0$, получаем, что её коэффициенты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ обращаются в нуль, если $\beta \neq \gamma$, кроме того, выполняется равенство

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha g_{12...n}}{g_{12...n}}.$$

Если потребовать обращения кручения S в нуль, то отличными от нуля компонентами связности ∇ будут

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} = \frac{\partial_\alpha g_{12...n}}{g_{12...n}}. \qquad (5)$$

В равенстве (5) суммирования по α нет.

Для доказательства существования связности нулевого кручения, совместимой с метрикой БМ g, достаточно в адаптированных картах задать её ненулевые компоненты с помощью равенства (5) и показать корректность такого задания связности.

Тензорной структурой на гладком многообразии называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффиноров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется *интегрируемой*, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Г. И. Кручкович в своей работе [5] сформулировал следующее утверждение: "Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально ".

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Тензорная структура* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ *интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (5) равен нулю.*

Найдем условия, при которых на многообразии с тензорной структурой $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ допускается структура многообразия над алгеброй поличисел. Последнее означает, что среди действительных карт можно составить атлас из карт, связанных между собой H-аналитическими преобразованиями. Известно [5], что H-аналитичность эквивалентна выполнению следующего условия: $C_\alpha D{=}DC_\alpha$. Нетрудно убедиться в том, что две действительные карты $\chi_1(x^\alpha)$, $\chi_2(y^\alpha)$ связаны между собой H-аналитическими преобразованиями тогда и только тогда, когда $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Многообразие с тензорной структурой* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ *является пространством над алгеброй поличисел тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (5) равен нулю.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Павлов Д. Г.* Обобщение аксиом скалярного произведения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). С. 5–19.

2. *Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.* Геометрия невырожденных поличисел // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7), т. 4. С. 3–25.

3. *Широков А. П.* Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 135–161.

4. *Вишневский В. В.* Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 5–64.

5. *Кручкович Г. И.* Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1972. Т. 16. С. 174–201.

УДК 514.764

А. В. Букушева, С. В. Галаев, И. П. Иванченко

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением D контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении D как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

Введение. В работе R. Miron [1] было положено начало исследованию геометрии финслеровых векторных расслоений, являющихся естественным обобщением касательных расслоений многообразий с финслеровой метрикой. Финслерово векторное расслоение характеризуется заданием на тотальном пространстве векторного расслоения класса линейных связностей, специальным образом ассоциируемых с некоторой инфинитезимальной связностью. В работе [2] было введено понятие гладкого распределения D с допустимой финслеровой метрикой, позволяющее с новой точки зрения взглянуть на проблематику финслеровых векторных расслоений. В работе [2] связность над распределением была названа внутренней связностью распределения, там же было дано определение продолженной связности и определена процедура, позволяющая при дополнительных предположениях перейти от внутренней связности к некоторой продолженной связности. В нашем случае продолженная связность является инфинитезимальной связностью в векторном расслоении $(D,\, \pi,\, X)$, где D – гладкое распределение контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой [2]. Мы покажем, что распределение